

Kompetenční rámec (budoucího) učitele matematiky

Přípravu KRU pro matematiky koordinovala: **Nad'a Vondrová (PedF UK Praha)**

Na přípravě se podíleli (v abecedním pořadí): **Radka Dofková** (PdF UP v Olomouci), **Miroslava Huclová** (FPE ZČU v Plzni), **Antonín Jančařík** (PedF UK Praha), **David Janda** (PedF UK Praha), **Helena Koldová** (PF JU v Českých Budějovicích), **Petra Konečná** (PřF Ostravská univerzita), **Magdalena Krátká** (PřF UJEP v Ústí nad Labem), **Radek Krpec** (PdF Ostravská univerzita), **Ladislav Kvasz** (PedF UK Praha), **Petr Liška** (PřF MU Brno), **Jakub Michal** (PedF UK Praha), **Vlasta Moravcová** (MFF UK Praha), **Karel Pazourek** (PřF JU v Českých Budějovicích), **Vladimíra Petrášková** (PF JU v Českých Budějovicích), **Jarmila Robová** (MFF UK Praha), **Libuše Samková** (PF JU v Českých Budějovicích), **Jan Wossala** (PdF UP v Olomouci), **Michal Zamboj** (PedF UK Praha).

Poznámka: Tento materiál podrobněji rozpracovává první z kompetencí obecného kompetenčního rámce, jehož struktura je v tabulce.

1. Vyučované obory a jejich zprostředkování žákům a žákyním

- 1.1. Rozumím vyučovaným oborům a dále se v nich rozvíjím.
- 1.2. Didakticky zprostředkuji obsah vyučovaných oborů žákům a žákyním v souladu s jejich vzdělávacími potřebami.

2. Plánování, vedení a reflexe výuky

- 2.1. Nastavuji cíle výuky a vedu k nastavování vlastních cílů také žáky a žákyně.
- 2.2. Poznávám vzdělávací potřeby žáků a žákyní a plánuji výuku tak, aby každému žákovi a žákyni umožňovala aktivně se zapojit a dosahovat stanovených cílů.
- 2.3. Podporuji u žáků a žákyní zvědavost a motivaci k učení.
- 2.4. Efektivně vedu výuku a v jejím průběhu zjišťuji míru porozumění žáků a žákyní a reaguji na jejich potřeby.
- 2.5. Reflektuji výuku a vyhodnocuji dosahování stanovených cílů.

3. Prostředí pro učení

- 3.1. Vytvářím bezpečné prostředí pro učení.
- 3.2. Vedu žáky a žákyně k chování podporujícímu učení a ke spolupráci.
- 3.3. Zajišťuji vhodné uspořádání fyzického prostoru i digitálního prostředí, kde se učení odehrává.

4. Zpětná vazba a hodnocení

- 4.1. Hodnotím na základě kritérií a vedu k tomu také žáky a žákyně.
- 4.2. Poskytuji a přijímám zpětnou vazbu a vedu k tomu také žáky a žákyně.
- 4.3. Vedu žáky a žákyně k reflexi jejich učení.

5. Profesní spolupráce

- 5.1. Spolupracuji s kolegy a kolegyněmi ve prospěch žáků a žákyní a společného profesního růstu.
- 5.2. Spolupracuji s rodiči a širší komunitou školy v zájmu žáků a žákyní.

6. Profesní sebepojetí, rozvoj, etika a duševní zdraví

- 6.1. Systematicky pracuji na utváření svého sebepojetí v roli učitele či učitelky a na svém profesním rozvoji.
- 6.2. Odpovědně pracuji s informacemi a s digitálními nástroji, vedu žáky a žákyně k demokratickým hodnotám a jednám v souladu s profesní etikou.
- 6.3. Systematicky pečuji o své duševní zdraví a psychohygienu.

Vysvětlení některých použitých pojmů

Model/reprezentace matematického pojmu: Konkrétní reprezentace abstraktního matematického konceptu, která pomáhá lépe pochopit nebo ilustrovat daný pojem, zahrnuje prostředky vizualizace a konkretizace. Běžným příkladem je konkrétní model geometrického tělesa nebo číselná osa pro modelování desetinných/reálných čísel. Dalším příkladem mohou být algebraické dlaždice pro modelování algebraických výrazů a jejich úprav.

Utajené a odcizené poznávání: Při utajeném poznávání jsou poznávací procesy žáků při jejich vlastní aktivitě „odtrženy od rozvíjení znalostí základních pojmů, takže žáci nerozumějí tomu, co dělají, neuvědomují si dost dobře, co se učí, a nemohou rozpoznávat poznávací přínos (přidanou hodnotu) výuky. Tento druh situací je příznačný pro výuku s vyžitím metod, které by při povrchním pohledu mohly podporovat propojení mezi rozvojem kompetencí a osvojováním učiva, jsou však použity jen formálně, bez vazby metody na obsah a na cíle.“ (Janík et al., 2013, s. 236). Při odcizeném poznávání nahrazuje vyučující poznávací procesy žáků vlastním výkladem. Podrobnější vysvětlení a příklady viz (Janík et al., 2013).

Izolovaný (separovaný) model; generický (univerzální) model; formální poznatek: Jedná se o pojmy z teorie generických modelů, která popisuje pravděpodobný proces vzniku matematického poznatku v mysli žáka. Izolované (dříve separované) modely jsou konkrétní případy budoucího abstraktního poznatku. Postupně dochází k vyjasňování, které případy k poznatku patří a které ne (ne-modely). Zobecněním konkrétních případů vzniká generický (dříve univerzální) model, který je prototypem každého izolovaného modelu a předstupněm abstraktního poznání. Formální poznatek je poznatek, který není opřen o izolované a generické modely a je zpravidla uchopen jen pamětí, bez porozumění. Podrobnější vysvětlení a příklady viz (Hejný, 2014).

Kognitivní konflikt je stav, kdy je žák nucen pracovat s informacemi, které jsou v rozporu s jeho dosavadními znalostmi, představami nebo přesvědčeními. Kognitivní konflikt, jakožto narušení rovnováhy projevující se mentálním diskomfortem, není možné snadno překonat pomocí stávajících mentálních schémat. Obvykle motivuje jedince k tomu, aby se pokusil situaci vyřešit a obnovit rovnováhu. Proto je považován za klíčový pro učení, protože podporuje aktivní myšlení a přehodnocování dosavadních znalostí. Díky tomuto procesu se jedinec učí nové koncepty a lépe chápe složitější situace.

Situační/matematický model: Situační model slovní úlohy je představa o situaci, kterou úloha popisuje, včetně představy o aktérech a vztazích mezi nimi. Matematický model slovní úlohy je výsledek abstrahování situačního modelu do podoby výpočtu, rovnice, grafu, tabulky atd., jejichž prostřednictvím žák úlohu řeší. Podrobnější vysvětlení a příklady např. Slovní úlohy – metodika (<https://slovni-ulohy-metodika.cz/>)

Zóna nejbližšího vývoje je myšlená oblast výsledků učení, kterou může žák dosáhnout za pomoci řízené podpory učitele či vrstevníka, avšak není schopen ji v danou chvíli dosáhnout samostatně. Představuje tak oblast potenciálního rozvoje, ve které má učení a výuka největší efekt. Blíže viz (Vygotskij, 2004).

Literatura pro pojmy: Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. PedF UK. Janík, T., Slavík, J., Mužík, V., Trna, J., Janko, T., Lokajíčková, V., Lukavský, J., Minaříková, E., Sliacký, J., Šalamounová, Z., Šebestová, S., Vondrová, N., & Zlatníček, P. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky*. Masarykova univerzita. Vygotskij, L. S. (2004). *Psychologie myšlení a řeči*. Portál.

Oblast 1: Vyučované obory a jejich zprostředkování žákům a žákyním

Kompetence 1.1: Rozumím vyučovaným oborům a dále se v nich rozvívám

Úroveň	Body specifikující kompetenci	Nové body specifické pro konkrétní obor	Konkrétní příklady
Úroveň 1: Absolvent/ka učitelství	1. Mám ve vyučovaných oborech znalosti a dovednosti, které mi umožňují efektivně plánovat a realizovat výuku (viz 2. oblast kompetencí).	Vysvětlím matematické koncepty a postupy základních matematických disciplín: aritmetika, algebra, matematická analýza, geometrie, statistika a pravděpodobnost.	Vysvětlím pojem racionálního čísla s periodou s využitím pojmu konvergence nekonečné geometrické řady, tj. chápu například, co znamená rovnost $0,9999...=1$. Chápu, že podstatou konceptu funkce je jednoznačnost přiřazení. K vysvětlení tohoto konceptu používám vhodné grafické reprezentace. Vysvětlím a definuji pojem klasické pravděpodobnosti na konkrétních modelech (např. házení mincí, házení hrací kostkou, náhodný výběr karet z balíčku apod.). Umím vybudovat různé číselné obory, znám vlastnosti operací na nich a umím je vhodně využít při práci s algebraickými výrazy (např. umím dokázat existenci iracionálních čísel nebo zdůvodnit algoritmus dělení dvou racionálních čísel).
		Uvědomuji si vazby a souvislosti základních matematických disciplín; získané znalosti a dovednosti aplikuji nejen uvnitř jednotlivých disciplín, ale i mezi nimi.	Uvědomuji si, jak lze algebraické rovnice využít např. v analytické geometrii (soustavy rovnic pro nalezení průsečíků přímky a kuželosečky). Dovedu využít výpočty obsahů a objemů při řešení úloh z geometrické pravděpodobnosti (např. určení pravděpodobnosti zásahu do části terče pomocí podílu obsahů kruhů). Uvědomuji si souvislost mezi klasickou pravděpodobností, statistickou pravděpodobností a náhodnými rozděleními ve statistice (např. rozdělení pravděpodobností na Galtonově desce). Uvědomuji si vazby mezi syntetickou a analytickou geometrií. Dokážu řešit vybrané geometrické úlohy více metodami. Využívám znalostí obsahů a objemů základních geometrických útvarů při odvozování dalších vztahů pro obsahy a objemy (např. obsah trojúhelníku pomocí obsahu kosodélníku).
		Formuluji a řeším elementární matematické problémy s využitím symbolického jazyka matematiky, používám různé reprezentace matematických situací, zejména aritmetické, algebraické a grafické.	Používám různé reprezentace funkce – tabulku funkčních hodnot, předpis, graf, slovní popis. Formuluji a řeším geometrické konstrukční úlohy v symbolickém jazyce. Modeluji vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem s využitím geometrické, grafické a algebraické reprezentace. Vytvořím symbolický model slovní úlohy (např. pomocí rovnice). Modeluji výpočet součtu členů konkrétní nekonečné geometrické posloupnosti pomocí obsahu částí čtverce.

		Dokážu formulovat definice a věty a interpretovat klíčové matematické pojmy, vlastnosti a vztahy na různé úrovni přesnosti.	Používám logické spojky a kvantifikátory při formulaci definic a vět. Formuluji Pythagorovu větu ve tvaru implikace a vím, že je speciálním případem kosinové věty, umím ji interpretovat geometricky (pomocí obsahů) i symbolicky. Víím, že platí i věta obrácená. Dokážu znaky dělitelnosti, umím je demonstrovat a ilustrovat jejich platnost příklady. Chápu koncept limity a umím jej správně interpretovat a ilustrovat bez použití její přesné definice. Víím, že limitní přechod je součástí mnoha procesů (součet nekonečné řady, určování obsahů, okamžitá rychlost apod.). Umím definovat míru v různých dimenzích (délka, obsah, objem) a umím ji vhodně vysvětlit. Umím i pomocí vhodných metod odvodit vztahy pro výpočet míry základních objektů.
2. Mám pozitivní vztah k vyučovaným oborům, zajímám se o jejich vývoj a budoucnost	Dokážu vyhledat a studovat historické a popularizační zdroje, a připravuji si tak svůj repertoár motivačních úloh a příkladů.	Chci porozumět některým matematickým a historickým souvislostem, které se týkají poznatků, které vyučuji. Proto si např. přečtu kvalitní knihu o historii matematiky či popularizační knihu napsanou významnými matematiky.	
	Zajímám se o matematické jevy spojené s fenomény diskutovanými ve společnosti, včetně přesahů matematických pojmů a metod do dalších oborů.	Využiji dostupných zdrojů (např. YouTube kanál <i>3Blue1Brown</i>) k pochopení alespoň základních principů fungování strojového učení jako reakci na zvýšený zájem o umělou inteligenci a strojové učení. Zajímám se o další fenomény rezonující ve společnosti, které by mohly vést ke zvýšené motivaci pro matematiku (např. šíření virové nákazy Covid-19 a matematické modely šíření epidemií). Udržuji si přehled o kvalitních YouTube kanálech (např. Numberphile, Veritasium), které korektně, ovšem popularizační a často vizuální formou vysvětlují matematiku nebo její aplikace.	
	Zajímám se o aktivity spojené s popularizací matematiky.	Využívám nabídek dalších vzdělávacích institucí (univerzity, akademie věd, science centra, ...) pro vlastní růst.	
3. Rozumím tomu, jak ve vyučovaných oborech vzniká (vědecké) poznání, využívám spolehlivé oborové zdroje informací a kriticky zdroje informací hodnotím.	Ovládám základní způsoby deduktivního dokazování stejně jako induktivního zdůvodňování matematických poznatků.	Rozumím, jak induktivně vytvářet hypotézy na základě empirických dat. Znám princip přímého a nepřímého důkazu a důkazu sporem, s jejichž pomocí umím hypotézu dokázat, či na základě protipříkladu vyvrátit.	
	Rozumím tomu, že empirická a induktivní zdůvodnění nejsou pro obor obecně dostatečná; současně si uvědomuji, že bez induktivní zkušenosti lze pouze obtížně dospět k porozumění a kritickému postoji, o které se deduktivní důkaz opírá.	Využívám empirických dat k vytvoření hypotézy o největším společném děliteli čísel ve tvaru $n^3 - n$, kterou poté dokážu deduktivně. Dovedu ilustrovat nedostatečnost empirických zdůvodnění např. pomocí úloh, která jsou pro nějaká „malá“ n pravdivá, ale obecně neplatí (např. závislost počtu útvarů, na které je kruh rozdělen pomocí tětiv sestrojených tak, že spojují n různých bodů rozmístěných po obvodu tohoto kruhu, na n se zprvu jeví být 2^n , ovšem již pro $n=5$ tato induktivně nalezená hypotéza selže, a situace tak vyžaduje zdůvodnění formou důkazu).	
	Uvědomuji si přítomnost a roli axiomatického systému, rozdíl mezi intuitivním uchopením pojmu a jeho definicí, a také úlohu a nezbytnost předpokladů v dokazovaném tvrzení.	Formuluji různé definice téhož pojmu a roli různých předpokladů (např. při důkazech Eulerovy věty).	

		Uvědomuji si historické pozadí vzniku určitých teorií, pojmů a metod, procesu postupného upřesňování pojmů a existenci různých úrovní přesnosti.	Využívám znalosti pojetí funkce v různých historických obdobích: ve starověku byly studovány spojité křivky vzniklé spojitým pohybem bodu, ve středověku závislosti fyzikálních veličin, v novověku se matematika pokoušela o definici funkce prostřednictvím analytického předpisu (Fourier), jako jednoznačného přiřazení veličin (Dirichlet) až po zobrazení dvou množin (Dedekind).
		Využívám spolehlivé zdroje týkající se tvorby matematických poznatků a zvažuji jejich obsah ve vazbě na vyučování matematiky.	Takovými zdroji jsou například <i>Mathematics and plausible reasoning</i> (Polya); <i>Proofs and refutations</i> (Lakatos); <i>Mathematics in Western Culture</i> (Kline); <i>Mathematical thought from ancient till modern times</i> (Kline).
	4. Umím ve vyučovaných oborech využívat moderní technologie.	Využívám matematický software (zejm. počítačový algebraický software [Computer Algebra System (CAS)], dynamický geometrický software, statistický software) pro efektivní řešení a tvorbu úloh.	Zapíšu data do tabulky tabulkového softwaru a na jejich základě vytvářím a řeším úlohy pro statistické zpracování (průměr, medián, modus) a grafickou reprezentaci dat. Tvořím a řeším úlohy na množiny bodů a jejich konstrukce v dynamickém geometrickém softwaru. Pomocí softwaru vytvářím a upravuji úlohy na rovnice, tak aby vyšlo požadované řešení. Pomocí softwaru efektivně ověřím řešení různých úloh.
		Dokážu algoritmizovat vhodné matematické úlohy pro řešení s pomocí moderních technologií.	Modeluji úlohy z finanční matematiky a algoritmizuji jejich řešení (např. tvorbu umořovacího plánu). Navrhnu algoritmus pro výpočet členů nějaké posloupnosti (např. Fibonacci). Dokážu objevit a ověřit algoritmus pomocí software a AI pro výpočet největšího společného dělitele dvou čísel. Navrhnu algoritmus pro konstrukci množiny bodů dané vlastnosti.
		Vytvářím statické a interaktivní vizualizace matematických jevů s využitím moderních technologií.	Vytvářím rovinné, popř. prostorové geometrické útvary a sleduji změny či zachování vybraných parametrů. Vytvářím interaktivní grafy funkcí v závislosti na parametrech. Dokážu vizualizaci přizpůsobit potřebám dalších vizualizačních nástrojů jako např. rozšířená a virtuální realita.
		Uvědomuji si přínos a limity moderních technologií pro svůj obor.	Uvědomuji si, že moderní technologie umožňují algoritmizovat úlohy a automatizovat výpočty, vizualizovat různé jevy, automatické dokazování a ověřování hypotéz. Uvědomuji si také jejich limity, např. výpočetní kapacita u velmi složitých matematických problémů či přesnost (počítače pracují s čísly v omezené přesnosti, což může vést k chybám při výpočtech s reálnými čísly, zejména velmi malými nebo velmi velkými). Uvědomuji si, že přínosem animace vizuálního důkazu Pythagorovy věty oproti početnímu ověření je interaktivní vizualizace, automatizace výpočtu i ověření, limitem je přesnost v případě použití čísel mimo rozlišovací schopnosti počítače (viz také dílčí bod 3 výše: Uvědomění si rozdílu mezi formálním důkazem a ověřením).

	5. Orientuji se ve vztahu vyučovaných oborů a kurikula na různých stupních vzdělávání.	Vymezím obsah a popíši strukturu a cílové zaměření vzdělávací oblasti <i>Matematika a její aplikace</i> , vysvětlím její význam.	Vím, že vzdělávací oblast Matematika a její aplikace na ZŠ se skládá z podoblastí s očekávanými výstupy, např. Geometrie v rovině a v prostoru, a že tyto podoblasti jsou doplněny učivem, např. prostorové útvary. Propojím očekávané výstupy s učivem. Uvědomuji si, že matematika rozvíjí schopnost řešení nejen matematických problémů. Uvědomuji si možnosti matematiky pro rozvoj klíčových kompetencí.
		Jsem schopen uvést očekávané výstupy a jím odpovídající učivo dílčích tematických celků, rozumím jejich vazbám napříč různými stupni vzdělávání.	Vím, že jedním z očekávaných výsledků učení v oblasti Algebra je „Řeší reálné problémy pomocí poměru, úměry a procent“ a uvědomuji si, že k tomuto výstupu se vztahuje učivo „přímá a nepřímá úměrnost“ a že na střední škole na tuto oblast navazuje oblast zaměřená na téma funkce, v níž žák modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí a k níž se vztahuje např. učivo exponenciální a logaritmická funkce.
		Mám přehled, jaké dokumenty upřesňují učivo a rozsah výuky matematiky pro daný stupeň vzdělávání, umím s nimi pracovat.	Znám upřesňující dokumenty na státní úrovni, jako jsou rámcové vzdělávací programy, Standardy pro základní vzdělávání, Katalog požadavků k maturitní zkoušce, dokumenty upřesňující učivo k jednotným přijímacím zkouškám aj. Uvědomuji si, že na školní úrovni jde například o školní vzdělávací program či jiné dokumenty, které škola přijala jako závazné.
		Jsem schopen v kurikulu matematiky identifikovat očekávané výsledky učení a s nimi související učivo s přesahem do dalších předmětů.	Vím, že výstup na úrovni základní školy „žák řeší aplikační úlohy na procenta“ má přesah např. do výuky chemie (roztoky), do základů společenských věd (úrok) aj. Vím, že výstup na úrovni střední školy související s hodnotami exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí má přesah do výuky fyziky (mechanické kmitání a vlnění, akustika), chemie (měření PH, poločas rozpadu radioaktivních látek) aj.
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	6. Reflektuji úroveň vlastních kompetencí ve vyučovaných oborech, jsem si vědom/a limitů těchto oborů i svých vlastních a kontinuálně se ve vyučovaných oborech vzdělávám	Uvědomuji si, že matematika má své limity, umím uvést příklady z pohledu filozofického, teoretického i praktického.	Umím vysvětlit, proč v mříži (na čtverečkovaném papíru) nelze sestrojit mřížový rovnostranný trojúhelník. Dovedu ukázat, jak mohou ovlivnit přesnost výpočtů praktické limity měření (např. když měříme délky stran trojúhelníku a vypočítáme jeho obsah). Dokážu vysvětlit koncept „Hilbertova hotelu“, tj. imaginárního hotelu s nekonečným počtem pokojů, kde každý pokoj je obsazen, a přesto může hotel přijmout dalšího hosta tím, že každého stávajícího hosta posune do následujícího pokoje. Uvědomuji si, že grafické řešení rovnice pomocí grafů funkcí není obvykle přesné, pouze přibližné.
		Chápu rozdíl mezi profesemi učitel matematiky a matematik, umím se správně identifikovat.	Uvědomuji si, že zatímco matematik se věnuje výzkumu, můj hlavní cíl je efektivní výuka a přizpůsobení matematického obsahu potřebám žáků.
		Uvědomuji si aktuální úroveň mých znalostí a dovedností v jednotlivých oblastech matematiky.	Když řeším matematické úlohy, vím, u jakých typů si mohu být jistější správností svého řešení. Identifikuji oblasti, kde mám silné dovednosti (např. algebra), a oblasti, kde potřebuji zlepšení nebo si nejsem svými dovednostmi jist/jista (např. statistika).
		Další vzdělávání v matematice plánuji a realizuji na základě vyhodnocení úrovně svých znalostí a dovedností a jejich potřeby pro můj profesní rozvoj.	Na základě vyhodnocení svých znalostí a dovedností se účastním odborných seminářů a studuji odbornou literaturu vhodnou pro můj profesní rozvoj. Nemám-li dostatečné zkušenosti s výukou daného tématu, čerpám z odborné literatury a konzultuji svou přípravu se zkušenými kolegy.

		Zajímám se dle svých možností o vývoj oboru, dokážu popsat některé aktuálně řešené či otevřené problémy a jejich význam, a to na základě studia matematických zdrojů vhodných pro učitele matematiky.	Sleduji některou z aktuálně rozvíjených oblastí matematiky (např. oblast fraktální geometrie a její aplikace). Uvědomuji si užitečnost členství v profesních organizacích (např. Společnost učitelů matematiky Jednoty českých matematiků a fyziků, v níž jsou propojeni učitelé matematiky i matematici). Účastním se konferencí pro učitele matematiky. Sleduji obsah časopisů pro učitele matematiky (např. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Rozhledy matematicko-fyzikální, Matematika – fyzika – informatika, Učitel matematiky apod.).
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	7. Rozumím souvislostem vyučovaných oborů s jinými obory a průřezovým konceptům, které jsou společné více oborům.	Rozumím interpretacím matematických konceptů na příkladech z reálného života.	Využívám svých znalostí např. geometrické posloupnosti při složeném úrokování, procent při výpočtu DPH a slevových akcí, poměru při práci s mapou (měřítko mapy) a při míchání směsí.
		Témata a problémy z jiných oborů dokážu ve vhodném zjednodušení matematizovat a řešit.	Vzájemné vztahy fyzikálních veličin dokážu matematizovat a řešit pomocí algebraických výrazů a rovnic. Problémy z oblasti diagnostiky chorob na základě výsledků testů řeším s využitím podmíněné pravděpodobnosti. Nejkratší vzdálenost mezi dvěma místy na zeměkouli dokážu odhadnout pomocí geometrického modelu koule.
		Matematické postupy a pojmy využívám pro kritické vyhodnocení informací v jiných oborech.	Kriticky posuzuji zobrazené grafy v mediích a v učebnicích dalších vzdělávacích oblastí z hlediska rozsahu a měřítek os. Kriticky posuzuji vhodnost zvolených charakteristik poloh (aritmetický, harmonický, geometrický průměr, medián, modus) vzhledem k povaze zkoumaného souboru dat (např. výpočet průměrné inflace, mzdy, teploty, rychlosti ...). Využívám matematické odhady k posouzení věrohodnosti číselných údajů.
	8. Rozumím terminologii, konceptům a vnitřním souvislostem vyučovaných oborů natolik, že dokážu efektivně plánovat a realizovat výuku také pro nadané a mimořádně nadané žáky s hlubokým zájmem o daný obor.	Průběžně sleduji matematické soutěže, korespondenční semináře a obdobné aktivity, řeším úlohy z těchto soutěží, abych pochopil/a jejich podstatu.	Jsem obeznámen s podstatou a pravidly Matematické olympiády a Matematického klokana.
		Postup při rozvíjení talentovaných žáků koordinuji s vědeckými či akademickými pracovišti.	Uvědomuji si, že pro nadanou mládež existují různé možnosti rozvoje, které organizují například univerzity či akademie věd.
		Témata z běžné výuky dokážu přiřadit k obecnějším konceptům, interpretovat a propojovat je mezi sebou tak, abych dokázal/a tvořit podnětné úlohy a otázky.	Vím, že přímá, resp. nepřímá úměrnost jsou příkladem lineární, resp. lineární lomené funkce; tyto závislosti souvisí s pojmem poměr. Vytvářím podnětné úlohy např. na měřítko plánu či mapy, závislost obvodu čtverce na délce jeho strany, úlohy na společnou práci. Téma kvadratická funkce propojím s řešením soustav lineárních rovnic a analytickou geometrií (parabola) při zjišťování, kolik hodnot funkce, resp. bodů paraboly je potřeba pro získání předpisu kvadratické funkce, podobně zjišťuji, jak by to bylo s dalšími kuželosečkami nebo funkcemi a jejich vlastnostmi. Do výuky zařazuji postupy STEM.
		Dokážu řešit úlohy různými způsoby a tyto způsoby kriticky posoudit.	Při řešení konstrukční úlohy o trojúhelníku se zadanými délkami dvou stran a velikostí úhlu proti jedné z nich dokážu začít libovolným ze zadaných prvků a uvědomuji si důsledky tohoto výběru (při výběru strany proti zadanému úhlu je úloha

			komplikovanější a obvykle vede na konstrukci množiny všech bodů, z nichž je úsečku vidět pod daným úhlem, což vede ke složitější diskusi počtu řešení). U úlohy na zjištění odchylky vybraných úhlopříček kvádrů dokážu postupovat početně, konstrukčně i analyticky. Při řešení soustavy lineárních rovnic o třech neznámých dokážu vytvořit diskusi o počtu řešení na základě vzájemné polohy tří rovin.
		Upravuji nebo vytvářím vlastní komplexnější úlohy, které dokážu gradovat podle obtížnosti.	Při řešení úlohy z tématu rovnice vytvářím gradované úlohy například doplněním parametrů, neznámé, zvýšením stupně rovnice či řešením ve vybraných číselných oborech. Základní aritmetické operace dokážu zprostředkovat nadaným žákům prostřednictvím zajímavých posloupností např. trojúhelníkových a čtvercových čísel a jejich zobecněními.

Širší komentář (cílem je vysvětlit význam uvedených kompetencí a podložit jej výzkumnou evidencí, zejména empirickými výzkumy dokládajícími pozitivní dopad na učení žáků, či k osvědčené odborné praxi) max. 1500 slov

V souladu s teoretickými východisky obecného kompetenčního rámce je porozumění oboru jednou ze základních kompetencí učitele matematiky. Na základě didaktické znalosti obsahu, kterou popsal Shulman (1986), uvádějí Ball a další (2008) konkrétní požadované znalosti specifické pro učitele matematiky. Ty zahrnují například prezentaci matematických myšlenek, hledání reprezentativních příkladů, propojování různých reprezentací, modifikaci úloh, ověřování správnosti výroků a další. K tomu je zapotřebí nejen dostatečná znalost vyučovaného obsahu a metod, ale i jejich přesahů. Učiteli matematiky však nestačí pouze efektivně ovládat matematický aparát; vyžaduje se od něj také ovládání širokého spektra elementárních reprezentací, kterými dokáže matematické myšlenky prezentovat, a metod řešení, které dokáže využít (Stein et al., 1996). Je totiž nezbytné, aby učitel dokázal proniknout „dovnitř“ procesu matematického myšlení (unpacking) (Ball et al., 2000; Rowland et al., 2011).

Z pohledu porozumění předmětu jsou v dílčích bodech kompetence 1.1 reflektovány dva základní motivy: konceptuální pochopení obsahu a využívání metod kritického myšlení a argumentace. Ma (2021) ve své empirické studii uvádí hlubokou konceptuální znalost elementární matematiky a aktivní přístup učitele ke svému vzdělávání jako zásadní faktor pro kvalitní výuku matematiky. Jedním ze základních cílů matematiky jako vědní disciplíny je snaha o přesný popis světa. K dosažení tohoto cíle je nezbytné použití formálního jazyka. Vinner (1991) uvádí rozdíl mezi představou pojmu a (formální) definicí pojmu. K hlubšímu porozumění pojmu je tak zapotřebí vytvářet různé představy pojmu a postupně je formovat pomocí protipříkladů až k cílové definici. Neodmyslitelnou součástí matematické struktury je formální odvozování, které slouží jako důkaz pravdivosti tvrzení. Hofstadter (2012) popisuje důkaz jako neformální produkt lidského myšlení, k jehož zdůvodnění slouží formalizace. Cílem matematiky je pak nevyvratitelný důkaz. Hofstadter rovněž zdůrazňuje hranice mezi formalizací a intuitivním zdůvodněním už na nejzákladnější úrovni. Formalizace je pak nezbytným prostředkem pro potvrzení pravdivosti tvrzení. Stylianides a další (2016) v přehledu empirických studií reflektují, že důležitým prvkem při výuce argumentace a dokazování není jen dobrá matematická znalost obsahu, ale také postoj učitelů k vhodnosti zavedení argumentace a důkazů do výuky a jejich metodologická připravenost.

Pokud je vykrystalizovaná deduktivní forma cílem, pak jsou intuice a konstrukce přinejmenším její hnací silou (Courant et al., 1996). Polya (1954, 1962) rozlišuje formální matematické myšlení (axiomy, definice, důkazy) a neformální matematické myšlení (zobecňování, induktivní argumentace, analogie, rozpoznávání konceptů, extrakce konceptů) a zdůrazňuje demonstrativní (formálně matematické) a věrohodné (intuitivní) zdůvodnění nezbytné pro řešení matematických problémů. Freudenthal (1973) klade důraz na osamostatnění matematických myšlenek a algoritmů a jejich uchopení pomocí aplikací v neznámém kontextu, čímž dochází k tzv. znovuzrození (re-inventing) myšlenky. Tím ovšem není zpochybněna potřeba technické zručnosti učitele matematiky; naopak je tato potřeba prohloubena o její ukotvení a využití v kontextu.

Je proto žádoucí, aby byl učitel seznámen s různými mezioborovými vztahy a dokázal je aktivně vyhledávat v dostupných materiálech. Vzhledem k šíři, hloubce a dynamičnosti vědního oboru nelze předpokládat, že absolvent a učitel bude disponovat znalostí nejnovějších faktů v matematice, ovšem očekává se, že bude své znalosti nadále prohlubovat a bude vědět, kde hledat relevantní zdroje a jak číst nebo studovat matematické texty. Kromě aktuálních aplikací se jako vhodné ukazuje propojení matematických znalostí s jejich historickým kontextem. Takové propojení není jen aktivizačním nebo motivačním prvkem, ale podporuje lepší znalost, pochopení a ukotvení matematických pojmů (viz Clark et al., 2018; Panasuk et al., 2013).

Důležitým faktorem ovlivňujícím moderní výuku matematiky i matematiku jako disciplínu jsou digitální technologie. Wolfram, jeden z nejvlivnějších tvůrců matematického softwaru, popisuje ve svých pracích (Wolfram 2002, 2022) nové možnosti experimentálního bádání v matematice i vědě obecně. S pomocí digitálních nástrojů je možné provádět velké množství experimentů, které poskytují představu o vztazích a chování daného jevu, z čehož lze vyvozovat hypotézy. Li et al. (2010) ve své metaanalýze zjistili, že efektivní výuka matematiky s pomocí digitálních technologií je výrazně ovlivněna stylem výuky, přičemž efektivní výuka byla podnícena konstruktivistickým přístupem. Drijvers et al. (2015) připomínají, že digitální technologie nenahrazují učitele, který by je měl dokázat správně využívat a propojovat s dalšími metodami. V návaznosti na Shulmana je proto důležitá obsahová

připravenost učitele, tzv. TPACK – technologická a pedagogická znalost obsahu. Důležitost připravenosti učitele matematiky v používání digitálních technologií a také jeho postojů k těmto nástrojům reflektují Zbiek et al. (2007).

Bibliografie

- Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83–104). Westport, CT: Ablex Publishing.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (Eds.). (2018). *Mathematics, education and history: Towards a harmonious partnership*. Cham, Switzerland: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3>
- Courant, R., Robbins, H., & Stewart, I. (1996). *What is mathematics?: An elementary approach to ideas and methods* (2nd ed.). New York, NY: Oxford University Press.
- Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In S. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135–151). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Netherlands: Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2>
- Hofstadter, D. R. (2012). *Gödel, Escher, Bach*. (P. Holčák, K. Horák, O. Huřák, Z. Kárník, L. Pick, J. Podolský, J. Rákosník, & M. Žofka, Trans.). Prague, Czech Republic: Dokořán, Argo.
- Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22, 215–243. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9125-8>
- Ma, L. (2021). *Znáť a učiť elementárnu matematiku* (J. Rákosník, Trans.). Prague, Czech Republic: Academia.
- Panasuk, R. M., & Horton, L. B. (2013). Integrating history of mathematics into the classroom: Was Aristotle wrong? *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2, 37–46.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Volume I: Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical knowledge in teaching* (Mathematics Education Library). Dordrecht, Netherlands: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455–488. <https://doi.org/10.2307/1163292>
- Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In Gutiérrez, Á., Leder, G.C., Boero, P. (Eds.) *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 315–351). Rotterdam, Netherlands: SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Dordrecht, Netherlands: Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5
- Wolfram, S. (2002). *A new kind of science*. Champaign, IL: Wolfram Media.
- Wolfram, S. (2022). *The Physicalization of Metamathematics and Its Implications for the Foundations of Mathematics*, Stephen Wolfram Writings.
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169–1207). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kompetence 1.2: Didakticky zprostředkují obsah vyučovaných oborů žákům a žákyním v souladu s jejich vzdělávacími potřebami.

Úroveň	Body specifikující kompetenci (převzato z obecného rámce, zůstává neměnné; specifický rámec toto neuvádí).	Nové body specifické pro konkrétní obor	Konkrétní příklady
Úroveň 1: Absolvent/ka učitelství	1. Srozumitelně a fakticky správně zprostředkují obsah vyučovaných oborů žákům a žákyním na příslušném stupni vzdělávání v souladu s jejich vzdělávacími potřebami, tj. obsah didakticky transformují.	Dokážu žákům zprostředkovat matematické pojmy a postupy srozumitelně na různé úrovni přesnosti, aniž by došlo k posunu významu z důvodu přílišného zjednodušení	Dokážu budovat pojem vektor (resp. funkce) od propedeutiky na úrovni základní školy (např. cesta z bodu A do bodu B, směr a délka posunutí, resp. závislosti) až po jeho vhodnou definici na střední škole v souladu s očekávanými výsledky učení.
		Vedu žáky k porozumění matematické symbolice a matematickému jazyku a dávám jim příležitost, aby se podíleli na jeho tvorbě	Vedu žáky k porozumění jazyku algebry, a to tak, že zobecňují své předchozí zkušenosti z aritmetiky (např. s pravidly předností operací) a geometrie (např. s popisem výpočtů obsahů a obvodů) prostřednictvím diskuse ve třídě.
		Uvědomuji si, jaké zkušenosti si žáci přinášejí z předchozího stupně vzdělávání, a dovedu je využít pro koncipování výuky	Využiji zkušeností žáků z prvního stupně se zlomky jako s částmi celku a se zobrazováním zlomků v různých reprezentacích při zavedení operací se zlomky. Využiji zkušeností žáků s mírou v geometrii (měření délky, zjišťování obsahu útvaru pokrýváním, zjišťování objemu tělesa přeléváním či vyplňováním) pro odvození postupů výpočtů obsahů útvarů a objemů těles.
		Vedu žáky ke zdůvodňování jejich závěrů a argumentaci	Vedu žáky ke zdůvodnění platnosti věty o součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníků v souladu s očekávanými výsledky učení jak pomocí modelování (manipulace s pomůckami), tak pomocí vět o souhlasných a střídavých úhlech.
		Uvědomuji si, že některé matematické pojmy mohou v nových kontextech měnit svůj význam a že některá konceptuální a procedurální omezení mohou v průběhu vzdělávání ztratit svou didaktickou platnost	Dokážu koncipovat výuku v souladu s tím, že pojem číslo mění svůj význam v průběhu 1., 2. a 3. stupně – od čísla přirozeného, přes číslo desetinné, celé, racionální až k číslu reálnému, případě komplexnímu. Uvědomuji si, že definiční obory funkcí se pak podle toho v průběhu vzdělávání rozšiřují (např. u funkce lichá odmocnina). Stejným způsobem na zvoleném číselném oboru závisí proveditelnost operací (odčítání: přirozená vs. celá čísla; sudá odmocnina: kladná reálná vs. všechna reálná čísla) a řešitelnost úloh (např. hledání kořenů kvadratické rovnice).
	2. V rámci didaktické transformace efektivně vytvářím příležitosti pro učení a využívám vhodné vyučovací metody a prostředky pro učení, např. učební úlohy, situace,	Dokážu nalézt/vybrat vhodné modely/reprezentace matematických pojmů (včetně příkladů a protipříkladů) a matematických postupů a posoudit jejich přínosy a rizika pro kvalitu vytvořeného matematického poznatku	Dokážu žákům zprostředkovat výhody a omezení různých reprezentací funkce. Vedu žáky k simulaci náhodného jevu např. hodem kostkou či mincí. Vizualizuji záporná čísla pomocí teploměru, pater ve výtahu, číselné osy aj. Při modelování části celku vedu žáky k využívání modelů kruhových (např. pizza), n -úhelníkových/obdélníkových (např. tabulka čokolády), úsečkových (číselná osa) a diskrétního. Používám geometrickou reprezentaci vztahu $(a + b)^2$ k prohloubení porozumění žáků příslušnému vzorci.

	modely a modelové příklady, a informační zdroje, včetně digitálních (viz také kompetence 2.2).	Uvědomuji si časté chyby, jichž se žáci dopouštějí u klíčových pojmů a postupů, a dokážu je využít pro podporu žákovského porozumění matematice	Uvědomuji si nebezpečí jen formálního osvojení vzorců pro povrch těles či pro obsah rovinných útvarů, proto využívám např. u povrchů a obsahů propojení vzorců s vizuální představou (sítě těles, čtvercová síť). Uvědomuji si rizika „zautomatizovaných“ postupů při řešení úloh (přímá a nepřímá úměrnost vs. trojčlenka) bez pochopení podstaty závislosti vztahů mezi veličinami.
		Vytvořím/sestavím sérii úloh, s jejichž pomocí žáci dospějí k poznatkům, a to až do stádia abstrakce (pokud to je vzhledem k jejich vzdělávacím potřebám účelné), a dokážu je nasměrovat v případě, že nejsou v řešení úspěšní, aniž bych jim řešení prozradil/a	Při zavádění a procvičování sčítání zlomků dokážu vytvořit sérii úloh zaměřených na vizuální modely, přes symbolické reprezentace až po úlohy vedoucí ke zformulování obecného pravidla na sčítání zlomků. Při zavádění operací se zápornými čísly připravím sérii úloh na práci s číselnou osou (jíž předchází např. krokování) s cílem postupně zformulovat obecná pravidla. Při výuce řezů těles graduji úlohy typem tělesa (např. krychle vs. jehlan), umístěním bodů roviny řezu (např. bod na hraně tělesa vs. bod uvnitř či vně tělesa) či zvoleným pohledem na těleso (např. nahléd vs. podhled). Při výuce řešení goniometrických rovnic graduji úlohy od základních přes úlohy vedoucí k substituci a úlohy vedoucí k využití goniometrických vzorců.
		Vedu žáky k uvědomění, že pro úlohy existují různé strategie řešení, a k posouzení jejich vhodnosti a výhodnosti	Vedu žáky k tomu, aby soustavu dvou lineárních rovnic řešili algebraicky, geometricky či odhadem. Vedu žáky k tomu, aby při řešení kvadratické rovnice dle konkrétní situace využívali vzorce pro určení kořenů, nebo rozklad na součin či doplnění na čtverec. Vedu žáky k tomu, aby při řešení konstrukčních úloh na trojúhelníky využívali věty o shodnosti trojúhelníků či množiny bodů dané vlastnosti. Vedu žáky k tomu, aby při řešení aplikačních úloh z kombinatoriky využívali grafické řešení, výčet možností, kombinatorická pravidla či vzorec; vedu je k uvědomění užitečnosti grafického řešení a výčtu možností ve fázi získávání vhledu do řešení úlohy.
		Znám a dokážu posoudit různá digitální prostředí a jejich vhodnost a rizika pro rozvoj porozumění matematice a vedu k tomuto uvědomění i žáky	Vedu žáky k tomu, aby ve výuce využívali CAS pro efektivní řešení algebraických, příp. geometrických úloh. Vedu žáky k využívání vhodných softwarů pro zpracování a analýzu dat, např. MS Excel. Vedu žáky k vizualizaci různých geometrických problémů a jejich hlubší analýzy (např. poloha ortocentra v závislosti na typu trojúhelníku) ve vhodném softwaru (např. GeoGebra nebo DGS – Dynamic Geometry System). Formuluji úlohy tak, aby se zmenšilo nebezpečí utajeného poznávání při použití dynamických softwarů (tedy např. místo prezentace důkazu Pythagorovy věty pomocí pohyblivých apletů, na něž se ale žáci dívají jako na „film“, aniž by si uvědomovali matematickou podstatu důkazu, formuluji několik úloh, které vedou ke zkoumání vztahů mezi obsahy čtverců nad stranami trojúhelníka). Vytvářím a zařazuji vhodné doprovodné úlohy v CAS směřující k rozvoji využití digitální gramotnosti pro pochopení matematické podstaty problémů.

	3. Zprostředkuji žákům a žákyním souvislosti mezi oborovou teorií, reálnými jevy a životní praxí, včetně aktuálního dění (viz také kompetence 2.3).	Vedu žáky k řešení úloh založených na reálných situacích a zvědomuji jim situace z jejich světa, které matematika pomáhá řešit, čímž podporuji jejich motivaci k učení i zvědavost	Zařazuji praktické úlohy z běžného života spojené s měřením a s určováním obsahů, objemů či velikostí úhlů, s úsporami a úroky, se zpracováním dat atp. Vedu žáky k modelování reálných situací pomocí matematických pojmů a diskusi o možných alternativách zadání v kontextu reálné situace (např. optimalizační úlohy). Vedu žáky k diskusi o řešitelnosti úlohy v kontextu reálné situace např. u úlohy, v níž jeden ze dvou kořenů kvadratické rovnice nedává v kontextu reálné situace smysl. Předcházím vzniku potenciálně nebezpečného přesvědčení, že každá úloha je dobře zadaná a každá má (právě daný počet) řešení, tím, že zadávám úlohy z reálného života, které tyto charakteristiky nemají.
		Vedu žáky k práci s autentickými informačními zdroji (tištěnými, digitálními, videozáznamy aj.) podporujícími porozumění matematických poznatků	Využívám aktuální data Českého statistického úřadu, např. demografické údaje, údaje o trendech nezaměstnanosti, vývoj HDP atp. pro rozvoj statistické gramotnosti. Dávám žákům příležitost k vyhledávání potřebných informací z reálných zdrojů, např. z novin, internetových stránek, letáků či map, včetně případů zdrojů s neúplnými informacemi, a vedu je ke kritickému zhodnocení těchto informací.
		Využívám příležitosti k motivaci pro konstrukci matematických poznatků např. jejich využitím v reálném životě, historickými souvislostmi apod. podle vzdělávacích potřeb žáků	Vytvářím příležitosti, aby žáci poznávali, že velká část moderních technologií je založena na matematických poznatcích a bez nich by neexistovala (předpověď počasí, tomografie, satelitní navigace, umělá inteligence). Pojem poměru motivuji např. pomocí zvětšování a zmenšování fotografií; vlastnosti funkcí pomocí známých fyzikálních jevů atp.
	4. Vyučované obory zprostředkovávám jako otevřené a stále se vyvíjející, a jako provázané s dalšími obory; ne jako uzavřené a izolované soubory vědění.	Využívám příležitosti k propojování matematiky s dalšími vyučovacími předměty a vedu žáky k řešení mezioborových úloh	Vedu žáky k modelování aktuálních problémů z reálného světa z oblasti pohybu těles (slovní úlohy o pohybu), optiky (lom a odraz), směsí (koncentrace roztoků, mísení kapalin o různých teplotách), společné práce (čerpadla, práce lidí), finanční matematiky apod.
		Tam, kde to je vhodné, buduji u žáků porozumění matematickým pojmům a postupům na pozadí jejich historického vývoje, a tím poukazuji na dynamiku vývoje matematiky	Vedu žáky k pochopení postupu, jak Archimedes odvodil přibližnou hodnotu konstanty π (pomocí aproximace mnohoúhelníky). Vedu žáky k tomu, aby dokázali s využitím základních pomůcek (provázek s uzly) vytyčit pravý úhel, čímž odkazují na předchozí generace stavitelů. Seznamuji žáky s některými historickými početními pomůckami (abakus, logaritmické pravítko, matematické tabulky) a s tím, jak a k čemu se používaly. Dokážu žákům pomocí vhodných příkladů a úloh zprostředkovat milníky historického vývoje práce s čísly (užití různých číselných soustav, kmenové zlomky, použití nuly a záporných čísel, římské vs. arabské číslice).
	5. Pracuji s prostředím pro učení žáků, včetně	Volím vhodné digitální nástroje s ohledem na matematický obsah tak, aby vedly k hlubšímu	Vedu žáky k tomu, aby ve vhodných situacích používali počítačový algebraický systém (CAS) k řešení složitějších algebraických rovnic, nerovnic a jejich soustav či ke zjednodušování algebraických výrazů;

Úroveň 2: Začínající učitel/ka	digitálního, tak, aby podporovalo jejich učení ve vyučovaných oborech (viz také 3. oblast kompetencí)	porozumění matematickým poznatkům a aby byly zohledněny vzdělávací potřeby žáků	statistický software a tabulkové procesory k práci s reálnými daty (například ze školních průzkumů nebo veřejných databází); software dynamické geometrie (DGS) ke konstrukci geometrických útvarů a k manipulaci s nimi nebo k vizualizaci a ověřování geometrických vět (jako např. Pythagorova věta nebo věta o středu kružnice opsané trojúhelníku).
		Uvědomuji si potenciál i limity digitálních nástrojů pro rozvoj matematických poznatků žáků a vedu k tomuto uvědomění žáky	Vedu žáky k uvědomění, že např. při zkoumání vlastností tečny kružnice se nemusí zabývat konstrukcí této tečny, ale mohou využít připravený příkaz pro tuto konstrukci v dynamickém geometrickém softwaru. Vedu žáky k vytváření vlastních aplikací (převodník měn, výpočet kořenů rovnice daného typu aj.). Při výuce tématu „těžnice trojúhelníku“ mohu ke stanovení hypotézy o průsečíku těžnic žáky navést k využití softwaru dynamické geometrie. Důkaz však provedu v jiném prostředí, neboť tento software přímo neposkytuje jednoznačné argumenty vedoucí k ověření stanovené hypotézy. Využívám toho, že různá digitální prostředí (např. kapesní kalkulačka, PC program, on-line nástroj či mobilní aplikace) mohou na stejný pokyn (např. dělení číslem 0) reagovat různě, jako motivačního prvku pro další matematické zkoumání žáků.
		Vytvářím podnětné a bezpečné prostředí, v němž žáci nabývají nových poznatků prostřednictvím např. řízeného objevování, argumenty podložené diskuse, produktivní práce s chybou	Algoritmus sčítání zlomků nesdělují jako hotový poznatek, ale vedu žáky ke zkoumání, které k tomuto algoritmu vede (zkoumáním převodu na společný jmenovatel). Pokud žák navrhne chybný postup, snažím se jej pomocí vhodných pomůcek a protipříkladů dovést k reflexi jeho chyby. Žáky vedu k objevení věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku pomocí vhodného rozstříhání trojúhelníku, měření úhloměrem nebo v geometrickém softwaru. Tímto způsobem můžu postupovat i pro vlastnosti speciálních typů trojúhelníků (pravoúhlý, rovnostranný...). Vedu žáky k tomu, že nejde o důkaz (ten by bylo třeba provést deduktivním způsobem). Při formulování definice čtverce vedu žáky k vytváření ekvivalentních tvrzení (např. pomocí vnitřních úhlů a kolmosti úhlopříček), vedu je k ověření jejich tvrzení pomocí geometrických konstrukcí, hledání protipříkladů a konstruktivní diskuse.
	6. Pracuji s předporozuměními (prekoncepty), včetně chybných porozumění (miskonceptů), která žáci a žákyně mají o klíčových pojmech ve vyučovaných oborech, a s častými chybami a překážkami pro porozumění obsahu.	Uvědomuji si, jaké matematické pojmy a postupy jsou pro žáky obtížné, jakých chyb se žáci zpravidla dopouštějí a dokážu analyzovat jejich příčiny a aplikovat metody, které jejich vzniku předcházejí či je didakticky využívají	U úloh se zlomky je častou konceptuální chybou předpoklad, že přirozené číslo uvedené v zadání úlohy je současně celkem. Dokážu sestavit úlohu, která takovou konceptuální chybu odhalí (tj. úlohu, kde celkem pro daný zlomek není číslo uvedené v zadání) a chybný postup zpochybní (tj. vede k zjevně nesprávným závěrům). Vedu žáky k postupům, které je při určování celku podpoří (např. systematický postup využívající manipulace nebo grafické znázornění, který je navede na správné určení celku).
		Uvědomuji si, jakým způsobem byly žákům představeny klíčové pojmy v předchozí etapě vzdělávání a jak s nimi pracovali, a dokážu na tyto skutečnosti navázat.	Mám představu o způsobu, jakým byly na 1. stupni ZŠ žákům představeny zlomky (zlomek jako část celku) a jak s nimi pracovali (grafické znázornění, porovnávání, úpravy, výpočty částí a celku na základě grafického znázornění). Při představování nových témat na 2. stupni ZŠ (operace se zlomky, další významy zlomku) využívám grafické znázornění a vedu žáky k uvědomění si vztahu operací a nových významů zlomku ke zlomku jako části celku. Při představování podstaty sčítání zlomků na 2. stupni ZŠ tak mohu využít obdélníkový model (tzv. čokoládu) využívaný na 1. stupni ZŠ při grafickém porovnávání zlomků. Zkušeností žáků se sčítáním a

			odčítáním zlomků mohu dále využít při představování algebraických úprav výrazů s odmocninami na střední škole.
	7. Vhodně využívám oborově-didaktické koncepty specifické pro vyučované obory, a to zejména při plánování, realizaci a reflexi výuky a v procesu zpětné vazby a hodnocení (viz 2. a 4. oblast kompetencí).	S oporou o odbornou literaturu popíšu na příkladu, jak se vytváří v mysli žáka matematický poznatek, a dovedu tuto znalost využít při plánování a realizaci výuky	Pomocí teorie generických modelů popíši proces objevování Pythagorovy věty s využitím vhodné motivace z praxe (viz 1.2.3) a historie (viz 1.1.2), od prvního izolovaného (separovaného) modelu, ve kterém žák objevuje vztah mezi obsahy čtverců nad stranami daného pravoúhlého trojúhelníku (např. s délkami stran 3, 4 a 5 j.), přes zobecnění tohoto vztahu, po generický model, kdy je věta prototypem, který lze aplikovat na různé případy pravoúhlých trojúhelníků. V hladině abstrakce a krystalizace vedu žáky k řešení úloh v jiných kontextech (např. v souřadném systému nebo při zavedení goniometrických funkcí) nebo komplexních úloh, kde lze větu využít (např. v prostoru), či k zobecnění věty pro libovolné podobné obrazce sestrojené nad stranami pravoúhlého trojúhelníku a propojení s dalšími tvrzeními (Eukleidovy věty, kosinová věta). Dokážu popsat proces řešení slovní úlohy s rozlišením situačního a matematického modelu a používám tento přístup pro podporu žáků. Zaměřuji se na jednotlivé kroky řešení slovní úlohy, pomáhám žákům, aby si je uvědomovali (např. pomocí zaškrťovacího seznamu).
		Uvědomuji si abstraktnost matematických poznatků a chápu, že procesu abstrakce předchází práce s konkrétními příklady poznatků	Žáky nejdříve vedu k tomu, aby měřili délky stran čtverců a obdélníků na fyzických objektech a určovali jejich obvod a obsah, dále je vedu k hledání obsahu a obvodu na čtverečkovaném papíru a postupně je vedu k uvědomění si numerických vztahů a výpočtu pomocí obecného vztahu. Při poznávání pojmu proměnná vytvářím pro žáky dostatek příležitostí k propojení poznatků z aritmetiky, např. hledání hodnoty výrazu pro konkrétní hodnotu proměnné, hledání extrémů atd.
		Rozlišuji kvalitu žakovského porozumění matematickému poznatku a postupu a formuluji takové úlohy a otázky pro žáky, aby mohli dosahovat hlubšího porozumění	Při výuce procent se kromě základních úloh zaměřených na ověření postupu určení základu a procentní části zaměřuji také na komplexní úlohy vyžadující porozumění konceptu procent v reálném životě (např. slevy, úroky, roztoky), a to i v netypických situacích. Obměňuji značení geometrických útvarů a vyvaruji se jejich prototypickému umístění (např. trojúhelník <i>ABC</i> se základnou rovnoběžnou s okrajem tabule). Při výuce rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou se nesoustředím pouze na jejich algoritmické řešení, ale také na pochopení významu absolutní hodnoty, tedy vedu žáky k její geometrické interpretaci jako vzdálenosti na číselné ose a předkládám jim úlohy, které vyžadují nejen nalezení řešení, ale také interpretaci výsledků vzhledem ke geometrickému významu. V rámci reflexe výuky identifikuji přítomnost formálních poznatků vhodnými úlohami (např. žák konstatuje “nekonečně mnoho řešení” pro soustavu dvou lineárních rovnic, ale neumí určit jedno konkrétní či rozhodnout, zda nějaká uspořádaná dvojice reálných čísel $[x, y]$ patří mezi hledaná řešení) a snažím se jejich vzniku

			předcházet tím, že upřednostňuji a podporuji vlastní intelektuální aktivitu žáků (např. zařazuji do výuky úlohy, které mají více řešení nebo nemají řešení žádné, čímž nabourávám přesvědčení, že všechny úlohy mají řešení). Vědomě předcházím vzniku didaktických formalismů ve výuce, např. v podobě odcizeného poznávání, kdy jsou žáci seznámeni s Vietovými vzorci pro určení kořenů kvadratické rovnice a umí je aplikovat, avšak nemají vytvořenu vazbu mezi jednotlivými parametry ve vzorci a vlastnostmi kvadratické funkce. Neumí je tedy např. využít pro sestavení kvadratického mnohočlenu s danými kořeny. Při budování porozumění trojúhelníkové nerovnosti využiji potencionálního vzniku kognitivního konfliktu při modelování trojúhelníků pomocí dřívěk. Viz též kompetence 1.2.6. Často využívám kognitivně náročné otázky. Např. místo, aby žáci odpovídali na otázku, jaký je obsah obdélníku se stranami délek 3 a 4 cm, položím otázku: Jaké délky stran mohl mít obdélník s obsahem 12 cm^2? Správné jsou pak odpovědi 3 a 4 cm, 2 a 6 cm, 1 a 12 cm, ale také 0,5 cm a 24 cm. Žáci mohou navrhnout celočíselné rozměry až po myšlenku „velmi tenkého a dlouhého obdélníku“ s neceločíselnými délkami stran.
		Uvědomuji si, že ne každý žák dospěje k hlubokému porozumění matematickým poznatkům a postupům, ale snažím se o to, aby každý žák dosáhl svého osobního maxima.	Pro žáky připravuji jak jednodušší úlohy s odstupňovanou nápovědou, tak složitější problémy, které vyžadují propojování matematických poznatků. Pro žáky připravuji série gradovaných úloh. Každý žák má možnost vybrat si úlohy dle svých schopností a dovedností, optimálně v zóně svého nejbližšího vývoje.
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	8. Vedu žáky a žákyně ve vyučovaných oborech ke kritickému uvažování a k tvůrčí činnosti a etickému jednání.	Dovedu koncipovat výuku tak, aby rozvíjela jednotlivé složky logicko-matematické gramotnosti, jak je formuluje revidovaný RVP.	Rozvíjím u žáků schopnost oddělovat a popisovat jednotlivé kroky řešení úlohy (např. rovnice) a u nich rozhodnout o jejich korektnosti a zdůvodnit jejich použití; rozvíjím tak jejich metakognitivní dovednosti. Předkládám žákům úlohy z reálného života a diskutuji s nimi vhodnost různých matematických modelů.
		Vedu žáky k tomu, aby diskusi nezakládali pouze na pocitech či domněnkách, ale zejména na logických argumentech a datech.	Organizuji diskusi s žáky a mezi žáky ohledně volby vhodné dopravy na základě uhlíkové stopy a požadovaných důsledcích s oporou o informace v dobrých zdrojích. Dovedu žáky dostávat do situací, kdy jejich úsudek a první dojem selhávají a matematická interpretace má podstatné přínosy (např. odhadnutí množství rýže ve známé legendě o šachovnici, Wasonův výběrový test či Monty-Hallův problém).
		Vedu žáky k hledání různých postupů a přístupů k řešení úloh a k autonomii při zdůvodňování jejich platnosti.	Při výuce úměrností vedu žáky k hledání různých strategií a jejich zdůvodňování; vedu je i k rozboru důvodů nesprávnosti nějakého postupu a pochopení navrženého řešení. I když někdo z žáků navrhne ihned správné řešení, dávám prostor i ostatním pro představení dalších strategií.
		Vedu žáky k formulování, ověřování a vyvracení hypotéz a k rozlišování předpokladů a důsledků	
		Vedu žáky k využívání heuristických strategií	Při řešení úloh s algebraickými výrazy či předpisy funkcí vedu žáky k promyšlenému dosazování hodnot. Při řešení úloh „na procenta“ vedu žáky k hledání vhodné strategie řešení (např. „přes jednotku“).

			Při řešení kombinatorických úloh vedu žáky k řešení různými způsoby včetně systematického výčtu, grafických náčrtů (stromy) apod.
		Vedu žáky k diskusi o výsledcích matematického modelování s ohledem na morální a etické principy	Diskutuji s žáky o vhodnosti interpretace výsledků statistického šetření s ohledem na možnou manipulaci, např. v podobě zavádějící grafické reprezentace.
	9. Zprostředkovávám žákům a žákyním průřezová témata a koncepty, které jsou společné více oborům; případně vyučuji také mezioborově, tematicky	Dokážu vybrat průřezové, mezioborové či integrované téma realizovatelné vzhledem k matematickému obsahu a vzdělávacím potřebám žáků a najít či vytvořit vhodné učební materiály	Mám přehled, kde všude je možné při matematizaci využít matematické téma “poměr” (při míchání směsí, vyčíslování chemických rovnic, vymezení nových fyzikálních veličin, práci s mapou apod.). Mám přehled, kde všude je možné využít kombinaci matematických témat “procenta”, “funkce”, “rovnice” a “posloupnosti” (např. finance: úroky na spořicí účtech, osobní rozpočty, kritické posouzení konkrétních finančních produktů).
		U multioborových témat dokážu zohlednit vzdělávací obsahy, které do tématu vstupují, a zvyklosti zúčastněných oborových didaktik; dokážu účelně spolupracovat s kolegy z různých oborů	Mám představu (nebo ji na základě spolupráce s kolegy z jiných oborů získám) o tom, jak konkrétně spolu souvisejí klíčové pojmy multioborových témat (např. “poměr”, “měřítko mapy”, případně “kartografická zobrazení”) a v jakých podobách a kontextech se s nimi obvykle ve škole pracuje (např. vymezení měřítka mapy jako poměru vzdálenosti na mapě ku vzdálenosti ve skutečnosti, s 1 jako prvním číslem v poměru, převod na poměr vzdálenosti v cm ku vzdálenosti v km, nebo grafické vyjádření měřítka mapy). Mám představu (nebo ji na základě spolupráce s kolegy z jiných oborů získám), jak funguje umořování dluhu a jaké klíčové pojmy do tohoto procesu vstupují (složené úrokování, úroková sazba, inflace, příjem rodiny, životní standard, zadlužování, exekuce apod.).
		Dokážu stanovit předpokládané znalosti, cíle a očekávané výstupy a formulovat učební úkoly mezioborové výuky z hlediska matematiky a dalších oborů	Pro žáky ovládající převody jednotek délky a pojem číselný poměr dokážu sestavit učební úlohu, která je seznámí s pojmem měřítko mapy a jeho číselným vyjádřením, s různými typy map podle měřítka a s praktickými situacemi, ve kterých se využívají (např. turistická mapa vs. autoatlas vs. Google Earth). Pro žáky ovládající geometrický postup rozdělení úsečky v daném poměru úlohu obohatím o grafické vyjádření konkrétního měřítka mapy. Pro žáky ovládající práci s procenty, základní funkce a vlastnosti posloupností dokážu sestavit soubor gradovaných otevřených učebních úloh týkajících se finančního plánování rodinného rozpočtu.
	10. Mám ucelenou koncepci výuky na příslušném stupni vzdělávání ve vyučovaných oborech, a to včetně koncepce výuky žáků a žákyň se speciálními vzdělávacími potřebami, včetně nadaných a mimořádně nadaných.	Připravuji a realizuji výuku matematiky podle potřeb skupiny i jednotlivých žáků	Prostřednictvím diagnostiky a důkazů o učení u konkrétního žáka/žákyně diferencuji svou výuku. Připravuji zadání úloh pro skupiny či jednotlivce jak formou, tak obsahem tak, aby vyhovovaly potřebám žáků (úrovni jejich schopností a modifikacemi danými např. individuálním vzdělávacím plánem). Pracuji s gradovanou náročností úloh a jsem si vědom toho, že ne všichni žáci musí vyřešit všechny úlohy. (Viz také 1.2.7.) Respektuji časové nároky žáka při řešení úloh.
		Připravuji či vyhledávám a realizuji aktivity pro vzdělávání žáků a žákyň se speciálními vzdělávacími potřebami a	Žákovi/žákyni s diagnostikovaným ADHD zadávám krátké interaktivní úkoly tak, abych zamezil/a rozptýlení pozornosti.

		spolupracuji s dalšími aktéry vzdělávání těchto žáků a žákyň (třídní učitel, asistent pedagoga, pracovníci školního a školského poradenského pracoviště, zákonní zástupci žáka/žákyně)	Mám přehled o matematických soutěžích na krajské, národní i nadnárodní úrovni a dalších aktivitách pro nadané žáky; jsem schopen doporučit vhodnou soutěž či jinou aktivitu nadanému žákovi, dokážu s ním pracovat při přípravě. Dokážu pracovat s talentovanými žáky i mimo běžné matematické soutěže, například zařazením rozšiřujících témat dle zájmů žáka (Cavalieriho princip, Eukleidův algoritmus, využití matic, Pickova věta apod.).
		Znám projevy nejběžnějších specifických poruch učení v matematice, volím adekvátní metody výuky na základě spolupráce s dalšími kompetentními osobami	Na základě doporučení SPP respektuji žakovy obtíže při zápisu zadání i řešení úloh. Žákovi s diagnostikovanou dyskalkulií umožním používat kompenzační pomůcky (např. kalkulačku, stovkovou tabulku nebo zlomkové zdi).
		Dokážu svou koncepci výuky matematiky zprostředkovat a zdůvodnit v rámci předmětových komisí a začínajícím kolegům, a to s oporou o výsledky aktuálních didakticko-matematických a psychologických výzkumů	Iniciuji, zprostředkuji a vedu diskusi v rámci předmětové komise o zavádění konkrétních pojmů (např. přímky v rámci analytické geometrie). Iniciuji, zprostředkuji a vedu diskusi v rámci předmětové komise o řazení témat v ročnících a případné úpravy ŠVP, pokud jsou podle mě potřeba. V rámci reflexe své hodiny jsem schopen zdůvodnit (např. začínajícímu kolegovi) schéma přípravy hodiny, návaznost úloh, reakce na práci žáků. Také identifikuji a zdůvodním své pedagogické chyby.

Širší komentář (cílem je vysvětlit význam uvedených kompetencí a podložit jej výzkumnou evidencí, zejména empirickými výzkumy dokládajícími pozitivní dopad na učení žáků, či k osvědčené odborné praxi) max 1500 slov

U kompetence 1.2 se opíráme o pilíře matematické zdatnosti, které popisují vzájemně propojené klíčové cíle, ke kterým by měla výuka směřovat (Kilpatrick et al., 2001, s. 5). Prvním pilířem je *konceptuální porozumění*, což znamená, že žáci rozumí matematickým pojmům, objektům, operacím a vztahům mezi nimi. Toto porozumění jde nad rámec pouhého zapamatování vzorců; zahrnuje schopnost pochopit, jak spolu různé matematické koncepty souvisí a jak je možné je aplikovat na řešení problémů. Konceptuální porozumění je základním předpokladem pro hlubší a trvalé pochopení matematiky.

Druhým pilířem je *procedurální zběhlost*, která zahrnuje schopnost provést matematický postup přesně, efektivně a v souladu s daným kontextem. Tato zběhlost však neznamena jen mechanické naučení se algoritmů bez pochopení jejich významu. Star (2005, s. 408) vymezuje procedurální zběhlost jako „znalost procedur, která je spojena s porozuměním, flexibilitou a kritickým hodnocením a která se odlišuje od znalosti pojmů (ale může s ní být spojena). Jde tedy o schopnost nejen správně aplikovat postupy, ale také porozumět tomu, kdy a proč je vhodné tyto postupy použít.

Třetím pilířem je *strategická kompetence*, která znamená schopnost formulovat, znázorňovat a řešit matematické úlohy. Žáci, kteří jsou strategicky kompetentní, umí rozpoznat matematické problémy ve světě kolem sebe, formulovat je v matematickém jazyce a efektivně hledat řešení.

Čtvrtým pilířem je *adaptivní úsudek*, což zahrnuje schopnost logického myšlení, reflexe, vysvětlování a odůvodňování matematických postupů. Adaptivní úsudek je klíčový pro pochopení hlubších matematických konceptů a pro schopnost žáka kriticky zhodnotit své vlastní řešení nebo argumenty jiných lidí.

Posledním, pátým pilířem je tzv. *sklon k produktivní činnosti*. Tento pilíř popisuje běžně projevovaný postoj žáků k matematice jako smysluplné, užitečné a hodnotné činnosti. Tento postoj je úzce spjat s přesvědčením žáků o jejich schopnosti uspět a s ochotou vynaložit úsilí potřebné k dosažení úspěchu. Výzkumy ukazují, že právě tento sklon k produktivní činnosti má významný vliv na to, jaké úsilí žák matematice věnuje a jaké dosahuje výsledky (Boaler, 2016a, 2016b; Dweck, 2017; Smetáčková, 2016).

Metaanalýza studií věnovaných kvalitě výuky matematiky Hieberta a Grouwse (2007) identifikovala dvě důležité tendence. První je, že *pojmy a vztahy jsou veřejné*. To znamená, že žáci dosahují konceptuálního porozumění, pokud jsou výukové aktivity zaměřeny na vysvětlení pojmů a vztahů mezi matematickými fakty, procedurami a myšlenkami. Žáci jsou například žádáni, aby hledali různé strategie pro řešení úloh, porovnávali je mezi sebou a zamýšleli se nad strukturou a vzájemnými vztahy mezi matematickými myšlenkami. Toto porovnávání a vyhledávání různých strategií bylo podpořeno mnoha empirickými studiemi (např. Durkin et al., 2017; Loibl & Leuders, 2019; Guo & Pang, 2011).

Druhá tendence, kterou Hiebert a Grouws identifikovali, je *žáci vynakládají úsilí* („pupils struggle with important mathematics“). Tato tendence zdůrazňuje, že žáci musí být vystaveni kognitivním výzvám a musí vynaložit určité úsilí, aby porozuměli matematice. Když jsou žáci postaveni před úlohy, které jsou v jejich „zóně nejbližšího vývoje“ (Vygotskij, 1970), jsou nuceni přemýšlet a objevovat řešení, což vede k hlubšímu porozumění. Učitelé zde hrají klíčovou roli, protože musí žáky vést k tomu, aby sami aktivně objevovali, vysvětlovali a sdíleli své myšlenky, aby se dostávali do kognitivních konfliktů, což je podstata kognitivní aktivizace v matematice (Lipowsky et al., 2009). I novější studie (např. Jonsson et al., 2014; Kapur, 2010, 2011, 2012) ukazují, že kognitivní úsilí je klíčovým prvkem úspěšného učení matematiky.

Od pregraduální přípravy až po samostatnou učitelskou praxi by se měla zvyšovat tzv. *didaktická citlivost* učitelů. Tato osobní schopnost jim umožňuje rozlišovat důležité aspekty výuky, přisuzovat jim význam a zaměřovat se na klíčové momenty ve vyučovací hodině (Janík et al., 2013, s. 235). Didaktická citlivost také učitelům umožňuje rozpoznat formality ve výuce, které mohou negativně ovlivnit porozumění žáků. Zde jde zejména o odcizené poznávání, při němž učitel nahrazuje poznávací aktivity žáků vlastním výkladem, a utajené poznávání (Janík et al., 2013), které je více skryté a může se objevit i v situacích, v níž se učitel snaží o podnětnou výuku, ale žákům zůstane matematické poznání v úlohách, které řeší, skryté.

Didaktická citlivost pomáhá učitelům sledovat také komunikaci mezi žáky a umožňuje jim ji regulovat tak, aby žáci přemýšleli a formulovali své myšlenky, aniž by jim učitelé příliš brzy prozradili správné řešení. Tento přístup je znám jako *nasměrování* („focusing pattern“), kde se učitel snaží zaměřit pozornost žáků na klíčové aspekty problému, aniž by jim napovídal řešení (Wood, 1998). Naopak „*trychtýřování*“ („funneling pattern“) je situace, kdy učitel postupně zjednodušuje otázky, až se žáci dopracují ke správné odpovědi, aniž by skutečně pochopili problém. I když se tomuto komunikačnímu vzoru nelze zcela vyhnout, didaktická citlivost by měla učiteli pomoci takové situace rozeznat.

V rámci prevence zmíněných formálností ve výuce je klíčová *didaktická analýza učiva*. Zahrnuje hlubší porozumění tomu, jakým způsobem žáci poznávají matematiku, a učitel by měl využívat teorie, které popisují tento proces poznávání. Mezi tyto teorie patří např. teorie generických modelů (Hejný, 2014) nebo zahraniční teorie, jako je reifikace (Sfard, 1991), APOS (Dubinsky et al., 2013) či abstrakce v kontextu, Hershkowitz et al., 2001).

Bibliografie

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430–511. <https://doi.org/10.1080/07370000802177235>

Boaler, J. (2016a). Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching. Wiley.

Boaler, J. (2016b). *Matematické cítenie*. Tatran.

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C., Begolli, K. N., Chang, B., Miller-Cotto, D., Young, L. K., & Davenport, J. L. (2017). Evidence for cognitive science principles that impact learning in mathematics. In D. C. Geary, D. B. Berch, R. Ochsendorf & K. Mann Koepke (Eds.), *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 297–325). Academic Press.

Dubinsky, E., Arnon, I., & Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of 0.79 and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(3), 232–258. <https://doi.org/10.1080/14926156.2013.816389>

Durkin, K., Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: lessons learned and next steps. *ZDM*, 49(4), 585–597. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0853-9>

Dweck, C. S. (2017). Nastavení mysli. Nová psychologie úspěchu aneb naučte se využít svůj potenciál. 2. aktual. vydání. Jan Melvil publishing.

Guo, J., & Pang, M. F. (2011). Learning a mathematical concept from comparing examples: The importance of variation and prior knowledge. *European Journal of Psychology of Education*, 26(4), 495–525. <https://doi.org/10.1007/s10212-011-0060-y>

Hejný, M. (2014). Vyučování matematice orientované na budování schémat: Aritmetika 1. stupně. PedF UK.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195–222. <https://doi.org/10.2307/749673>Hiebert a Grouws

Janík, T., Slavík, J., Mužík, V., Trna, J., Janko, T., Lokajíčková, V., Lukavský, J., Minaříková, E., Sliacký, J., Šalamounová, Z., Šebestová, S., Vondrová, N., & Zlatníček, P. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky*. Masarykova univerzita.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20–32. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.003>

Kapur, M. (2010). Productive failure in mathematical problem solving. *Instructional Science*, 38(6), 523–550. <https://doi.org/10.1007/s11251-009-9093-x>

Kapur, M. (2011). A further study of productive failure in mathematical problem solving: Unpacking the design components. *Instructional Science*, 39(4), 561–579.

Kapur, M. (2012). Productive failure in learning the concept of variance. *Instructional Science*, 40(4), 651–672. <https://doi.org/10.1007/s11251-012-9209-6>

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. The National Academies Press.

- Lipowsky, F., Rakoczy, K., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., Reusser, K., & Pauli, C. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of Pythagorean Theorem. *Learning and Instruction*, 19(6), 527–537. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.11.001>
- Loibl, K., & Leuders, T. (2019). How to make failure productive: Fostering learning from errors through elaboration prompts. *Learning and Instruction*, 62, 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.03.002>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: Reflection on processes and object as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189x015002004>
- Schwartz, D. L., & Martin, T. (2004). Inventing to prepare for future learning: The hidden efficiency of encouraging original student production in statistics instruction. *Cognition and Instruction*, 22(2), 129–184. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2202_1
- Smetáčková, I. (2016). Matematické sebehodnocení žáků a žákyň ve 4. a 8. ročníku ZŠ. *Scientia in educatione*, 7(1), 16–28. <https://doi.org/10.14712/18047106.272>
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404–411.
- Vygotskij, L. S. (1970). *Myšlení a řeč*. Praha: SPN.
- Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167–178). NCTM.

Oblasti 2 až 6: Tabulka pro vytvoření konkrétních příkladů ve výuce oboru:

OBLAST 2: PLÁNOVÁNÍ, VEDENÍ A REFLEXE VÝUKY

Kompetence 2.1: Nastavuji cíle výuky a vedu k nastavování vlastních cílů také žáky a žákyně.		
Úroveň	Body specifikující kompetenci (převzato z obecného rámce, zůstává neměnné; specifický rámec toto neuvádí):	Ilustrace formou konkrétního příkladu/příkladů, jak se daná kompetence projevuje ve výuce daného oboru (co dělá učitel, co dělají žáci): (Poznámka: příklady není nutné uvádět za každou cenu, uveďte je jen tam, kde to je z pohledu vašeho oboru podstatné.)
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Jsem přesvědčen/a o potenciálu každého žáka a každé žákyně postupně dosáhnout stanovených cílů.	Učitel např. nikdy nedává najevo, že někteří žáci „nemají na matematiku buňky“. Naopak vždy komunikuje ve smyslu, že snaha vede k úspěchu, i když cesta každého je jiná a také jinak dlouhá.
	2. Cíle výuky nastavuji na základě znalostí oboru a způsobů jeho zprostředkování (kompetence 1.1 a 1.2), reflexe předchozí výuky (kompetence 2.5) a vzdělávacích potřeb žáků a žákyně (kompetence 2.2).	
	3. Cíle nastavuji tak, aby vedly k naplnění očekávaných výstupů a rozvoji klíčových kompetencí a gramotností v souladu s ŠVP/RVP. Zařazuji také cíle průřezových témat.	
	4. Vedu žáky a žákyně k porozumění cílům výuky.	
	5. Plánuji sekvence navazujících vyučovacích hodin směřujících k dlouhodobým cílům.	Na začátku nového tematického bloku si učitel stanoví, k jakému cíli chce dospět, a je schopen dosahování tohoto cíle rozdělit do série úloh a ty následně do jednotlivých hodin.
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	6. Formuluji postupné kroky k naplnění cílů (či více možných úrovní naplnění cílů) a podporuji žáky a žákyně podle jejich vzdělávacích potřeb tak, aby dosahovali maximálního pokroku a aby postupně mohl každý žák a žákyně stanovených cílů dosáhnout.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	7. Zapojuji žáky a žákyně do nastavování cílů a vedu je k formulaci vlastních cílů učení.	
	8. Nastavuji náročné a zároveň splnitelné vzdělávací cíle pro každého žáka/žákyni a nabízím cesty k jejich dosažení.	

Kompetence 2.2: Poznávám vzdělávací potřeby žáků a žákyň a plánuji výuku tak, aby každému žákovi a žákyni umožňovala aktivně se zapojit a dosahovat stanovených cílů.		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Poznávám žáky a žákyně, jejich vzdělávací potřeby a aktuální úroveň jejich kompetencí. Vědomě při tom pracuji s vlastními předsudky.	
	2. Plánuji výuku tak, aby vedla k aktivnímu zapojení žáků a žákyň.	
	3. Využívám různorodé výukové postupy ve fyzickém i digitálním prostředí (výukové metody, organizační formy práce, výukové prostředky, způsoby hodnocení a reflexe výuky), které směřují ke zvoleným cílům a jsou vhodné vzhledem k vyučovanému oboru a potřebám žáků a žákyň (viz také kompetence 1.2).	
	4. Plánuji výuku tak, aby všechny její součásti byly logicky provázané a směřovaly k naplňování vytyčených cílů.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	5. Rozpoznávám speciální vzdělávací potřeby žáků a žákyň, podle potřeby je konzultuji (viz kompetence 5.1 a 5.2) a jednám tak, aby se jim dostalo včasné podpory a hlubší diagnostiky jejich vzdělávacích potřeb.	
	6. Volím postupy v souladu s doporučeními školských poradenských zařízení a školního poradenského pracoviště pro vzdělávání konkrétních žáků a žákyň (v návaznosti na bod 5). Poskytuji autonomně podporu v 1. stupni podpůrných opatření.	
	7. Využívám předem promyšlené vhodné výukové postupy pro jednotlivé skupiny žáků a žákyň podle jejich vzdělávacích potřeb (v návaznosti na body 1 a 5).	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	8. Volím výukové postupy tak, aby každý žák a každá žákyně bez ohledu na sociální postavení, etnicitu či pohlaví/gender	

	nebo znevýhodnění naplňoval/a zvolené cíle v co nejvyšší míře vzhledem ke svým individuálním možnostem, a to včetně žáků a žákyň se speciálními vzdělávacími potřebami, nadaných a mimořádně nadaných.	
Kompetence 2.3: Podporuji u žáků a žákyň zvědavost a motivaci k učení.		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Zjišťuji, co už žáci a žákyně umí a vědí, a nově vyučovaný obsah a kompetence s tím propojuji. Cíleně navazuji na předchozí výuku.	
	2. Propojuji výuku se zkušeností žáků a žákyň a zprostředkovávám jim smysl vyučovaného obsahu (proč se konkrétní obsah či kompetenci učí). Viz také kompetence 1.2.	
	3. Povzbuzuji a inspiruji žáky a žákyně k dalšímu učení tím, že oceňuji jejich silné stránky, jejich snahu a pokrok a zprostředkovávám jim konkrétní příklady výstupů úspěšného učení.	
	4. Motivuji žáky a žákyně tím, že se sám/sama neustále učím, a to také od žáků a žákyň a spolu s nimi.	
	5. Projevuji zájem o vyučované obory a jejich smysl pro jednotlivce i společnost. Viz také kompetence 1.1.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	6. Podporuji u žáků a žákyň postoje (nastavení mysli), které jim pomáhají rozvinout a udržet motivaci (např. mé schopnosti nejsou fixní, ale mohu je rozvinout a rostou s mým úsilím; mohu uspět a už jsem v minulosti mnoho krát uspěl/a; překonávám překážky, a to mě posiluje).	
	7. Podporuji odpovědnost žáků a žákyň za jejich učení tím, že jim vytvářím příležitosti aktivně využívat to, co se naučili, autonomně při výuce objevovat a učit se mezi sebou navzájem, a to ve fyzickém i digitálním prostředí.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	8. Výuku cíleně propojuji se souvislostmi z jiných předmětů.	

	9. Motivuji efektivně také žáky a žákyně z málo podnětného prostředí a ty dosud málo motivované.	
Kompetence 2.4: Efektivně vedu výuku a v jejím průběhu zjišťuji míru porozumění žáků a žákyň a reaguji na jejich potřeby.		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Formuluji srozumitelná a stručná zadání úkolů či výukových situací a po zadání ověřuji, do jaké míry jim žáci a žákyně porozuměli.	
	2. V průběhu výuky sleduji potřeby žáků a žákyň a vhodně na ně reaguji.	
	3. Vedu výuku tak, abychom já i žáci a žákyně efektivně nakládali s časem.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	4. V průběhu výuky uplatňuji postupy, díky nimž jsme já i žáci a žákyně schopni vyhodnocovat, jak se jim aktuálně daří v procesu učení. Učím žáky a žákyně pracovat s nástroji (fyzickými i digitálními), které umožňují sledovat a zaznamenávat jejich pokrok.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	5. V průběhu výuky upravuji podle možností podmínky pro učení každého žáka/žákyně a poskytuji mu/jí potřebnou podporu.	
Kompetence 2.5: Reflektuji výuku a vyhodnocuji dosahování stanovených cílů		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Rozumím procesu reflexe výuky, jeho fázím a významu pro zlepšování učení žáka a žákyň i pro můj vlastní profesní rozvoj. Výsledky reflexe využívám pro plánování navazující výuky (kompetence 2.1 a 2.2).	
	2. Průběžně získávám různorodé důkazy o učení žáků a žákyň (projev nebo produkt jeho/její práce, který dokládá posun v učení) a eviduji je.	
	3. Pravidelně získávám zpětnou vazbu na svou výuku od žáků a žákyň a kolegů a kolegyně (případně spolužáků a spolužaček v průběhu studia učitelství); jsem otevřený/á jejich zpětné vazbě. Dávám zpětnou vazbu kolegům a kolegyním na jejich výuku a reflektuji ji spolu s nimi.	

	4. Na základě bodů 2 a 3 analyzuji svou výuku, identifikuji příčiny, proč docházelo či nedocházelo k pokrokům v učení žáků a žákyň, a navrhuji změny pro svůj budoucí postup, které následně aplikuji v praxi.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	5. Vyhodnocuji dopad svého působení na žáky a žákyně ve více rovinách (kompetence, trvalé porozumění, motivace, aspirace, sociální vztahy ad.).	
	6. Na základě výsledků reflexe si stanovuji svůj rozvojový cíl a využívám je pro sebepoznání a svůj profesní rozvoj (kompetence 6.1).	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	7. Dlouhodobě získávám různorodé důkazy o učení každého žáka a žákyně, systematicky je eviduji a vyhodnocuji pokrok každého žáka a žákyně.	

OBLAST 3: PROSTŘEDÍ PRO UČENÍ

Kompetence 3.1: Vytvářím bezpečné prostředí pro učení:		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Naplňuji základní předpoklady pro vznik pozitivních vztahů a prostředí důvěry (znám žáky a žákyně jménem, jednám s nimi konzistentně a předvídatelně, sám/sama dodržuji dohodnutá pravidla, uznávám vlastní chyby).	
	2. Komunikuji s žáky a žákyněmi s respektem, tj. partnersky, vstřícně a otevřeně. Projevuji zájem o každého žáka a žákyni, nabízím mu/jí dialog a spolupráci, respektuji jeho/její sebepojetí, identitu a potřebu autonomie v jednání	
	3. Vedu žáky i žákyně k tomu, aby se vzájemně poznávali a budovali mezi sebou pozitivní vztahy.	
	4. Dávám jasně najevo svůj respekt k lidem různého pohlaví či genderu, barvy pleti, národnosti či etnické příslušnosti, náboženství, sexuální orientace, socioekonomického statusu či původu a vedu k respektu také žáky a žákyně. Vědomě pracuji s vlastními předsudky a rozvíjím své interkulturní kompetence.	
	5. Cíleně reaguji na rizikové chování žáků a žákyň, včetně projevů ohrožujících pozitivní vztahy a důvěru ve třídě, zejména na projevy verbální agrese (včetně výsměchu, ponižování apod., a to ve fyzickém i digitálním prostředí) nebo i fyzické agrese; rozpoznávám projevy šikany i v zárodečné fázi a řeším je ve spolupráci s provázejícím učitelem či učitelkou či dalšími kolegy a kolegyněmi.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	6. Podporuji žáky a žákyně v tom, aby projevovali své názory a potřeby a nebáli se při svém učení chybovat, o chybách přemýšleli a dále se z nich učili. Vlastní chyby odkrývám žákům a žákyním jako příležitosti k učení.	
	7. Vedu žáky a žákyně k tomu, aby si uvědomovali společné zájmy a hodnoty skupiny a vhodně reagovali na projevy ohrožující pozitivní vztahy ve třídě a respekt k odlišnostem.	

	8. Všímám si fyzických znaků či projevů u dítěte či dospívajícího, které mohou naznačovat, že je s ním špatně zacházeno. Pokud se objeví, umím postupovat dle platných předpisů a doporučení, např. podle metodiky KID.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	9. Systematicky pracuji se třídou s cílem předcházet rizikovému chování a projevům šikany ve fyzickém i digitálním prostředí. Rozpoznávám projevy šikany i v zárodečné fázi a neprodleně je řeším samostatně i ve spolupráci s kolegy/němi, vedením školy či dalšími odborníky a odbornicemi.	
Kompetence 3.2: Vedu žáky a žákyně k chování podporujícímu učení a ke spolupráci:		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Vedu žáky a žákyně ke spolupráci a vzájemné podpoře při učení. S prvky konkurence a soutěživosti při výuce nakládám tak, aby nebyla narušena spolupráce a vzájemná podpora ve třídě.	
	2. Vedu žáky a žákyně k tomu, aby si uvědomovali emoce a potřeby sebe sama i druhých a aby si uvědomovali dopady vlastního chování na sebe i ostatní. Podporuji žáky a žákyně v rozvoji socioemočních dovedností.	
	3. Vedu žáky a žákyně k efektivní organizaci práce, k osvojování strategií a návyků, které usnadňují učení.	
	4. Předcházím chování žáků a žákyň, které ohrožuje prostředí vhodné pro práci, a cíleně na něj reaguji, když se objeví. Vyjasňuji očekávané chování, oceňuji a upevňuji chování podporující učení. Využívám přitom popisnou zpětnou vazbu a opírám se o komunikovaná očekávání a pravidla.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	5. Stanovuji spolu se žáky a žákyněmi pravidla pro jednání ve třídě (vč. digitálního prostředí), jejichž cílem je vytváření prostředí vhodného pro učení a bezpečného prostředí (viz kompetence 3.1). Dávám žákům a žákyním prostor pravidla spoluvytvářet. Pracuji se sankcemi za porušení pravidel transparentně a v souladu s pravidly	

	školy. Usiluji, aby co nejvíce odpovídaly přirozeným důsledkům přečinu.	
	6. Pravidelně se žáky a žákyněmi hovořím o očekávaném chování při výuce a věnuji se praktickému nácviku vhodného chování se žáky (v návaznosti na bod 5), oceňuji a upevňuji chování podporující učení.	
	7. Důsledně reaguji na případné chování žáků a žákyň, které závažně narušuje prostředí pro učení nebo vztahy ve třídě i se mnou. Opírám se přitom o spolupráci s kolegy/němi a vedením školy. Využívám výzkumně podložené strategie reagování na náročné chování.	
	8. Pokud jsem v roli třídního učitele či učitelky, pracuji se třídou jako s týmem a usiluji o rozvoj kvalitních vztahů ve třídě. Vedu cílené třídnické hodiny/aktivity se zaměřením mj. na body uvedené výše.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	9. Systematicky vedu žáky a žákyně k samostatnosti a odpovědnosti. Při komunikaci jim dávám prostor pro autonomii; direktivnější způsoby komunikace využívám jen v opodstatněných případech (např. nebezpečí) jako vědomý nástroj.	
Kompetence 3.3: Zajišťuji vhodné uspořádání fyzického prostoru i digitálního prostředí, kde se učení odehrává		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Uvědomuji si vliv prostředí a prostorového uspořádání třídy, vybavení a pomůcek na učení žáků a žákyň.	
	2. Uvědomuji si dopady nastavení digitálních nástrojů, digitálního prostředí a jeho uživatelské přístupnosti a použitelnosti na učení žáků a žákyň.	
	3. Efektivně využívám různé možnosti přizpůsobení prostorového uspořádání třídy, vybavení a pomůcek v závislosti na zvolených cílech.	
	4. Efektivně využívám dostupné digitální nástroje a prostředí pro podporu učení žáků a žákyň v souladu s pravidly školy a digitálními kompetencemi žáků a žákyň	

	(např. informační systém školy, Learning Management System – LMS, apod.).	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	5. Volím vhodná venkovní a mimoškolní prostředí pro výuku v závislosti na cílech výuky zejména s ohledem na možnost fyzického pohybu a zážitkového učení pro žáky a žákyně.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	6. Ve spolupráci s kolegy a vedením školy zajišťuji, aby prostorové uspořádání třídy, nastavení digitálního prostředí, vybavení a pomůcky poskytovaly žákům optimální podmínky pro učení.	

OBLAST 4: ZPĚTNÁ VAZBA A HODNOCENÍ

Kompetence 4.1: Hodnotím na základě kritérií a vedu k tomu také žáky a žákyně		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Pro hodnocení práce žáků a žákyň a jejich pokroku v učení využívám popisná kritéria. Tato kritéria jsou jim srozumitelná a korespondují s cíli výuky. Při nastavování kritérií zohledňuji nejen očekávané výstupy, ale i evidenci o dosavadním pokroku žáků a žákyň. S cíli učení i s kritérii pro hodnocení je včas seznamuji.	
	2. Vedu žáky a žákyně k sebehodnocení na základě kritérií, kterým rozumějí, a podporuji tím jejich odpovědnost za vlastní učení. Poskytuji jim k tomu nástroje, vč. digitálních.	
	3. Vedu žáky a žákyně k vzájemnému hodnocení pokroku v učení na základě jim srozumitelných kritérií, a to za předpokladu, že se při tom daří zachovávat bezpečné prostředí (kompetence 3.1).	
	4. Využívám různorodé metody a formy hodnocení v závislosti na oborových i dalších cílech vzdělávání a sleduji jejich dopad na žáky a žákyně. Dávám tak žákům a žákyním příležitost různým způsobem prokázat a ověřit si, co se naučili.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	5. Zapojuji žáky a žákyně do tvorby kritérií pro hodnocení jejich učení.	
	6. Spolupracuji s kolegy a kolegyněmi na formulaci či sladování kritérií pro hodnocení učení žáků a žákyň.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	7. Samostatně vytvářím a využívám vhodná kritéria pro průběžné dlouhodobé hodnocení pokroku žáků a žákyň v učení a v osvojování kompetencí.	
Kompetence 4.2: Poskytuji a přijímám zpětnou vazbu a vedu k tomu také žáky a žákyně.		
Úroveň 1: Absolvent/	1. Rozumím významu zpětné vazby pro učení žáků a žákyň a uvědomuji si význam chyb pro učení.	

ka učitelství	2. Poskytuji zpětnou vazbu tak, aby byla efektivně využitelná pro další učení žáků a žákyň, tj. aby ukazovala další krok ke zlepšení, byla respektující, konkrétní, včasná a konstruktivní. Preferuji pozitivní zpětnou vazbu, tj. oceňuji to, co se daří, a zároveň nezamlčuji slabší stránky. Vedu k poskytování takové zpětné vazby také žáky a žákyně.	
	3. Rozlišuji mezi popisným a hodnoticím jazykem, využívám popisný jazyk jako podstatnou součást zpětné vazby a vedu k tomu žáky a žákyně.	
	4. Vytvářím dostatek příležitostí k tomu, aby mi žáci a žákyně dávali zpětnou vazbu na mou výuku.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	5. Opírám zpětnou vazbu o kritéria (viz kompetence 4.1) tak, aby žáky a žákyně vedla k porozumění tomu, co je v hodnocené činnosti důležité, a jak je možné ji zlepšovat, a tím posilovala jejich vnitřní motivaci k učení.	
	6. Využívám různé způsoby poskytování zpětné vazby žákům a žákyním na jejich práci tj. od rychlých a okamžitých forem zpětné vazby (např. ústní ocenění, palec nahoru, úsměv) po podrobnější a časově náročnější zpětnou vazbu (např. písemná zpětná vazba, slovní hodnocení apod.).	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	7. Systematicky analyzuji chyby žáků či žákyň i vlastní a využívám je jako příležitosti pro další učení.	
Kompetence 4.3: Vedu žáky a žákyně k reflexi jejich učení.		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Rozumím významu reflexe učení žáků a žákyň pro efektivitu jejich učení.	
	2. Vedu žáky a žákyně v průběhu výuky, případně po jejím skončení, k vyhodnocování procesu vlastního učení, tj. k vyhodnocování toho, co jim pomáhá či naopak brání v učení. Vedu žáky a žákyně k tomu, aby na základě této reflexe lépe řídili vlastní učení.	

Úroveň 2: Začínající učitel/ka	3. Vedu žáky a žákyně k vyhodnocování výsledků jejich učení, tj. k vyhodnocování toho, co se naučili, kde se v procesu dlouhodobého učení nacházejí, na čem mohou stavět a jak mohou v učení směrem k vytyčeným cílům nejlépe postupovat dál.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	4. Systematicky využívám různorodé metody a formy vedení žáků a žákyň k reflexi vlastního učení (tj. od rychlých metod a forem v průběhu výuky, po časově náročnější písemné formy, jako jsou např. mapy pokroku, kompetenční schémata apod.).	

OBLAST 5: PROFESNÍ SPOLUPRÁCE

Kompetence 5.1: Spolupracuji s kolegy a kolegyněmi ve prospěch žáků a žákyň a společného profesního růstu.		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Zvu kolegy a kolegyně (či spolužáky a spolužačky v průběhu studia učitelství) na pozorování své výuky a chodím pozorovat výuku také k nim. Výuku společně reflektujeme, poskytujeme si zpětnou vazbu a vzájemně se inspirujeme.	
	2. Podle možností vyučuji v páru (tandemu) s kolegou či kolegyní (či se spolužákem nebo spolužačkou nebo provázejícím učitelem/učitelkou v průběhu studia učitelství) nebo s uvádějícím učitelem/učitelkou. Společně výuku plánujeme, vedeme a vyhodnocujeme.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	3. Pokud je ve třídě asistent/ka pedagoga, spolupracuji s ní/ním ve prospěch žáků a žákyň. Podle možností spolupracujeme na přípravě, vedení a reflexi výuky.	
	4. Se svými kolegy a kolegyněmi, s asistenty/kami pedagoga a/nebo s pracovníky a pracovníci školního poradenského pracoviště či dalšími (externími) odborníky a odbornicemi komunikuji o vzdělávacích potřebách konkrétních žáků a žákyň a hledám s nimi řešení pro jejich naplňování.	
	5. Jsem aktivním členem/členkou školního týmu a s ohledem na své zkušenosti se zapojuji do rozvoje školy či profesní komunity a získávám tak podněty pro svůj rozvoj. Na úrovni školy či širší profesní komunity se například zapojuji do společných projektů, kolegiálních rozvojových skupin, podílím se na společných úpravách nebo tvorbě ŠVP či didaktických materiálů.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	6. Podle možností podporuji studenty a studentky učitelství či dalších pedagogických programů a začínající pedagogy a pedagožky i další kolegy a kolegyně, a to zejména tím, že jim dávám příležitost účastnit se mé výuky a společně ji reflektovat, vyučuji s nimi v páru nebo tím, že se účastním jejich výuky a reflektuji ji s nimi.	

Kompetence 5.2: Spolupracuji s rodiči a širší komunitou školy v zájmu žáků a žákyň.		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Uvědomuji si důležitost komunikace s rodiči či zákonnými zástupci žáka či žákyně. Jsem schopen/schopna využívat komunikační dovednosti tak, aby komunikace probíhala partnersky a aby co nejefektivněji vedla k cíli spolupracovat v zájmu žáků či žákyň.	
	2. Zapojuji se (pod vedením provázejícího učitele/ky) do komunikace s rodiči či zákonnými zástupci na podporu rozvoje jejich dětí.	
	3. Využívám komunikaci s rodiči či zákonnými zástupci (bod 2) k seznámení se s rodinným zázemím žáků a žákyň tak, abych mohl/a tuto znalost využít k efektivnímu vzdělávání žáků a žákyň.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	4. Podílím se na aktivitách, které zapojují širší komunitu školy a externí aktéry do vzdělávání žáků a žákyň (např. společné školní projekty a akce s rodiči a dalšími členy širší komunity školy).	
	5. Vhodně komunikuji o průběhu vzdělávání, vzdělávacích potřebách a rozvoji žáků a žákyň tak, aby měli rodiče či zákonní zástupci dostatek informací pro efektivní podporu vzdělávání žáka/žákyně z jejich strany. Podporuji rodiče v tom, aby hráli aktivní roli v podpoře vzdělávání svých dětí.	
	6. V situaci, kdy chybí základní podpora žáka/žákyně ze strany rodičů, usiluji o kompenzaci chybějící podpory žáka/žákyně ze strany školy (např. zajištění pomůcek apod.) a komunikuji o tom s vedením školy.	
	7. Nastavuji a udržuji pravidla komunikace tak, aby probíhala s respektem k potřebám mým i rodičů a vedla co nejefektivněji k cíli spolupracovat v zájmu žáků a žákyň. V případě potřeby vhodně zapojuji do komunikace také další kolegy/ně či vedení školy.	
	8. V závislosti na potřebě a na své roli ve škole (zejm. třídní učitel/ka) spolupracuji s rodiči nebo zákonnými	

	zástupci žáků a žákyň v zájmu jejich vedení k samostatnosti a odpovědnosti za jejich chování (viz kompetence 3.2).	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	9. Zapojuji experty a expertky z praxe či širší komunitu školy do vzdělávání žáků a žákyň, a to efektivně vzhledem k cílům učení. Vhodně využívám externí příležitosti pro rozvoj žáků a žákyň.	

OBLAST 6: PROFESNÍ SEBEPOJETÍ ROZVOJ, ETIKA A DUŠEVNÍ ZDRAVÍ

Kompetence 6.1: Systematicky pracuji na utváření svého sebepojetí v roli učitele či učitelky a na svém profesním rozvoji.		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Vědomě pracuji na utváření svého profesního sebepojetí, tj. formuluji či upravuji svou učitelskou vizi, jakým učitelem chci či nechci být a proč. Svou učitelskou vizi opírám o reflektovanou zkušenost, poznání sebe sama a svých silných i slabých stránek v roli učitele/ky, o odborné poznatky a další zdroje. Vysvětlím přínos své učitelské vize pro učení a rozvoj žáků a žákyň.	
	2. Na základě svých rozvojových potřeb a své učitelské vize si stanovuji rozvojové cíle. Systematicky pracuji na jejich naplňování a využívám k tomu široké škály prostředků (např. vzdělávání, odborná literatura, kolegiální spolupráce, rozvojové komunity, mentoring).	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	3. Vyhodnocuji naplňování svého rozvojového cíle. Cíl pravidelně přehodnocuji a nastavuji si cíl nový. Vyhodnocuji účinnost prostředků, které využívám pro svůj profesní růst. Usiluji o maximalizaci pozitivního dopadu na učení žáků a žákyň skrze svůj profesní růst.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	4. Systematicky využívám reflexi (kompetence 2.5) a profesní spolupráci (kompetence 5.1 a 5.2), včetně pravidelné zpětné vazby od žáků/žákyň a kolegů/kolegyň, k vyhodnocování svého vlivu na žáky/žákyně, svých vlastních silných a slabých stránek a svých vzdělávacích potřeb.	
Kompetence 6.2: Odpovědně pracuji s informacemi, vedu žáky a žákyně k demokratickým hodnotám a jednám v souladu s profesní etikou.		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Respektuji vědecká fakta, tzn. odlišuji informace založené na vědeckém poznání od informací, které tento základ nemají.	
	2. Respektuji duchovní život, náboženství a duchovní tradice.	
	3. Orientuji se na mediální scéně, využívám informace z důvěryhodných zdrojů, jednám odpovědně při využívání	

	médií a sociálních sítí, mj. nešířím neověřené zprávy a dezinformace, odpovědně využívám umělou inteligenci.	
	4. Ctím odbornost a význam znalostí pro utváření názorů a rozvoj kompetencí.	
	5. Vyznávám demokratické hodnoty zakotvené v Ústavě ČR a podporuji roli veřejných institucí a občanské společnosti pro jejich naplňování. V rámci svého občanského života, studia či práce se aktivně zapojuji do demokratických procesů (ve škole např. volby do školské rady, spolupráce s žákovskými parlamenty apod.).	
	6. Jednám v souladu s profesní etikou učitele a učitelky, tj. v souladu s hodnotami a postoji obsaženými v tomto kompetenčním rámci nebo v jiných platných etických kodexech spojených s učitelskou profesí.	
Úroveň 2: Začínající učitel/ka	7. Vedu žáky a žákyně k respektu k vědeckým faktům (bod 1) i duchovnímu životu a tradicím (bod 2) a k orientaci na mediální scéně a odpovědné práci s informacemi, sociálními sítěmi a umělou inteligencí (bod 3).	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	8. Vedu žáky a žákyně k rozvoji charakteru, osvojování demokratických hodnot a k podpoře veřejných institucí a občanské společnosti, a to zejména tím, že dávám žákům a žákyním příležitost zažívat uskutečňování těchto hodnot ve výuce a životě školy.	
Kompetence 6.3: Systematicky pracuji na svém duševním zdraví a psychohygieně.		
Úroveň 1: Absolvent/ ka učitelství	1. Věnuji odpovídající pozornost sám/sama sobě; sleduji svůj psychický stav (i na základě reflexe, viz kompetence 2.5), vedle svého studia či práce věnuji odpovídající pozornost také svým fyzickým potřebám (spánek, strava, odpočinek, pohyb), jiným potřebám, osobním zájmům, vztahům a sociálním kontaktům.	
	2. Pojmenovávám svá očekávání, obavy a potřeby spojené s učitelskou rolí a aktivně s nimi pracuji. Umím je sdílet s druhými a říci si o pomoc.	

Úroveň 2: Začínající učitel/ka	3. Při plánování a realizaci výuky kladu důraz také na rovnováhu mezi pracovním a osobním životem, využívám již hotové materiály a inspiraci od kolegů a kolegyň, přenáším odpovědnost a aktivitu na žáky a žákyně tam, kde je to možné, vhodné a podstatné pro mou psychohygienu.	
	4. Při péči o své psychické zdraví aktivně a podle potřeby využívám dostupné prostředky, jako je kolegiální rozhovor, mentoring, intervize, supervize nebo jiná laická i odborná pomoc.	
Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka	5. Umím dlouhodobě sledovat stav svého psychického zdraví a vykonávat svou práci tak, aby to pro mne bylo dlouhodobě udržitelné a naplňující.	