



Spolufinancováno
Evropskou unií



MATEMATIKA

PŘÍLOHA KOMPETENČNÍHO RÁMCE ABSOLVENTA A ABSOLVENTKY UČITELSTVÍ

Podpora rozvoje učitelských kompetencí (PProUK), Klíčová aktivita 2

Reg. číslo: CZ.02.02.XX/00/23_019/0008385





Autorský tým: Naděa Vondrová (PedF UK Praha, koordinátorka), Radka Dofková (PdF UP v Olomouci), Miroslava Huclová (FPE ZČU v Plzni), Antonín Jančařík (PedF UK Praha), David Janda (PedF UK Praha), Helena Koldová (PF JU v Českých Budějovicích), Petra Konečná (PřF Ostravská univerzita), Magdalena Krátká (PřF UJEP v Ústí nad Labem), Radek Krpec (PdF Ostravská univerzita), Ladislav Kvasz (PedF UK Praha), Petr Liška (PřF MU Brno), Jakub Michal (PedF UK Praha), Vlasta Moravcová (MFF UK Praha), Karel Pazourek (PřF JU v Českých Budějovicích), Vladimíra Petrášková (PF JU v Českých Budějovicích), Jarmila Robová (MFF UK Praha), Libuše Samková (PF JU v Českých Budějovicích), Jan Wossala (PdF UP v Olomouci), Michal Zamboj (PedF UK Praha).

Jazyková redakce: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta

Grafická úprava: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy; Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta

Elektronická verze publikace je dostupná na www.msmt.cz, www.edu.gov.cz



ÚVODNÍ SLOVO A SLOVNÍČEK POJMŮ



V tomto dokumentu se věnujeme oblasti 1 kompetenčního rámce, tedy matematice a jejímu vyučování. Oblast se skládá ze dvou kompetencí. Kompetence 1.1 se týká znalostí matematiky a kompetence 1.2 se zaměřuje na didaktickou transformaci obsahu. Níže uvádíme bližší vysvětlení některých pojmů, které jsou pro učitelství matematiky klíčové a v dokumentu je používáme.

Při **utajeném poznávání** jsou poznávací procesy žáků při jejich vlastní aktivitě odtrženy od rozvíjení znalostí pojmů, takže žáci nerozumějí tomu, co dělají, neuvědomují si dost dobře, co se učí, a nemohou rozpoznávat poznávací přínos výuky. Tento druh situací je příznačný pro výuku s využitím metod, které by při povrchním pohledu mohly podporovat propojení mezi rozvojem kompetencí a osvojováním učiva. Jsou však použity jen formálně, bez vazby metody na obsah a na cíle. Při **odcizeném poznávání** nahrazuje vyučující poznávací procesy žáků vlastním výkladem (Janík et al., 2013).

Model/reprezentace matematického pojmu je konkrétní reprezentace abstraktního matematického konceptu, která pomáhá lépe pochopit nebo ilustrovat daný pojem, zahrnuje prostředky vizualizace a konkretizace (např. model geometrického tělesa, číselná osa, algebraické dlaždice pro modelování algebraických výrazů a jejich úprav).

Pro popis vzniku matematického poznatku v mysli žáka je možné použít pojmů z teorie generických modelů (Hejný, 2014). **Izolované modely** jsou konkrétní případy budoucího abstraktního poznatku. Postupně dochází k vyjasňování, které případy k poznatku patří a které ne (ne-modely). Zobecněním konkrétních případů vzniká **generický model**, který je předstupněm **abstraktního poznání**. **Formální poznatek** není opřen o izolované a generické modely, je uchopen pamětí, bez porozumění a jeho použitelnost mimo kontext, v němž vznikl, je omezená.

Kognitivní konflikt je stav, kdy žák pracuje s informacemi, které jsou v rozporu s jeho dosavadními znalostmi, představami nebo přesvědčeními. Tento konflikt není možné překonat pomocí stávajících mentálních schémat. Motivuje jedince k obnovení rovnováhy a podporuje aktivní myšlení a přehodnocování dosavadních znalostí. Tak se jedinec učí nové koncepty a lépe chápe složitější situace.

Situační model slovní úlohy je představa o situaci, kterou úloha popisuje, a o jejích aktérech a vztazích mezi nimi. **Matematický model** je výsledek abstrahování situačního modelu do podoby výpočtu, rovnice, grafu, tabulky atd. (např. *Slovní úlohy – metodika* (<https://slovní-úlohy-metodika.cz/>)).

Zóna nejbližšího vývoje je myšlená oblast výsledků učení, které může žák dosáhnout za pomoci řízené podpory učitele či vrstevníka, avšak není schopen jí v danou chvíli dosáhnout samostatně (Vygotskij, 1970). Představuje oblast potenciálního rozvoje, ve které má učení a výuka největší efekt.

Zkratky: CAS (Computer Algebra System, počítačový algebraický systém), DGS (Dynamic Geometry System, software dynamické geometrie), AI (Artificial Intelligence, umělá inteligence).

VICE ABSOLVENTA A ABSOLVENTKY UČITELSTVÍ

Profesní kompetence obsažené v tomto Rámci je možné zjednodušeně vyjádřit také formou této vize absolventa a absolventky učitelství:

PŘEJEME SI ABSOLVENTA A ABSOLVENTKU UČITELSTVÍ, KTERÝ NEBO KTERÁ V CO NEJVYŠŠÍ MOŽNÉ MÍŘE:

- rozumí vyučovaným oborům, dále se v nich rozvíjí a zprostředkovává je žákům a žákyním podle jejich vzdělávacích potřeb;
- poznává žáky a žákyně a jejich vzdělávací potřeby a nastavuje s ohledem na ně cíle výuky;
- vede výuku tak, aby umožňovala každému žákovi i žákyni naplňovat jeho či její potenciál bez ohledu na sociální postavení nebo znevýhodnění a maximálně rozvíjet jeho či její klíčové kompetence a gramotnosti;
- podporuje u žáků a žákyň motivaci k učení a reaguje na jejich potřeby;
- vytváří bezpečné prostředí pro učení a vede žáky a žákyně k chování podporujícímu učení, ke spolupráci a vzájemnému respektu;
- vhodně pracuje s digitálním i fyzickým prostředím pro učení;
- hodnotí na základě kritérií a převážně formativně, to zejména znamená, že poskytuje a přijímá zpětnou vazbu a vede k tomu také žáky a žákyně;
- spolupracuje s kolegy a kolegyněmi na výuce a podpoře konkrétních žáků a žákyň a komunikuje s rodiči v zájmu jejich dětí;
- reflektuje svou výuku na základě důkazů o učení žáků a žákyň;
- s oporou o reflexi výuky utváří své sebepojetí v roli učitele či učitelky a řídí svůj další profesní rozvoj;
- odpovědně pracuje s informacemi a s digitálními nástroji, vede žáky a žákyně k demokratickým hodnotám a jedná v souladu s profesní etikou;
- a pečuje o své duševní zdraví a psychohygienu.



KOMPETENČNÍ RÁMEC ABSOLVENTA A ABSOLVENTKY UČITELSTVÍ

Kompetenční rámec absolventa a absolventky učitelství je tvořen 18 kompetencemi rozdělenými do 6 oblastí.

1. Vyučované obory a jejich zprostředkování žákům a žákyním

- 1.1. Rozumím vyučovaným oborům a dále se v nich rozvíjím.
- 1.2. Didakticky zprostředkuji obsah vyučovaných oborů žákům a žákyním v souladu s jejich vzdělávacími potřebami.

2. Plánování, vedení a reflexe výuky

- 2.1. Nastavuji cíle výuky a vedu k nastavování vlastních cílů také žáky a žákyně.
- 2.2. Poznávám vzdělávací potřeby žáků a žákyň a plánuji výuku tak, aby každému žákovi a žákyni umožňovala aktivně se zapojit a dosahovat stanovených cílů.
- 2.3. Podporuji u žáků a žákyň zvědavost a motivaci k učení.
- 2.4. Efektivně vedu výuku a v jejím průběhu zjišťuji míru porozumění žáků a žákyň a reaguji na jejich potřeby.
- 2.5. Reflektuji výuku a vyhodnocuji dosahování stanovených cílů.

3. Prostředí pro učení

- 3.1. Vytvářím bezpečné prostředí pro učení.
- 3.2. Vedu žáky a žákyně k chování podporujícímu učení a ke spolupráci.
- 3.3. Zajišťuji vhodné uspořádání fyzického prostoru i digitálního prostředí, kde se učení odehrává.

4. Zpětná vazba a hodnocení

- 4.1. Hodnotím na základě kritérií a vedu k tomu také žáky a žákyně.
- 4.2. Poskytuji a přijímám zpětnou vazbu a vedu k tomu také žáky a žákyně.
- 4.3. Vedu žáky a žákyně k reflexi jejich učení.

5. Profesní spolupráce

- 5.1. Spolupracuji s kolegy a kolegyněmi ve prospěch žáků a žákyň a společného profesního růstu.
- 5.2. Spolupracuji s rodiči a širší komunitou školy v zájmu žáků a žákyň.

6. Profesní sebepojetí, rozvoj, etika a duševní zdraví

- 6.1. Systematicky pracuji na utváření svého sebepojetí v roli učitele či učitelky a na svém profesním rozvoji.
- 6.2. Odpovědně pracuji s informacemi a s digitálními nástroji, vedu žáky a žákyně k demokratickým hodnotám a jednám v souladu s profesní etikou.
- 6.3. Systematicky pečuji o své duševní zdraví a psychohygienu.

OBLAST 1 VYUČOVANÉ OBORY A JEJICH ZPROSTŘEDKOVÁNÍ ŽÁKŮM A ŽÁKYNÍM

Kompetence 1.1: Rozumím vyučovaným oborům a dále se v nich rozvívám.

Úroveň 1:

Absolvent/ka učitelství



PŘÍKLADY OBOROVĚ SPECIFICKÉHO NAPLNĚNÍ KOMPETENCE

1. Mám ve vyučovaných oborech znalosti a dovednosti, které mi umožňují efektivně plánovat a realizovat výuku (viz 2. oblast kompetencí).

Vysvětlím matematické koncepty a postupy základních matematických disciplín: aritmetika, algebra, matematická analýza, geometrie, statistika a pravděpodobnost.

- Vysvětlím pojem racionálního čísla s periodou s využitím pojmu konvergence nekonečné geometrické řady, chápu např., co znamená rovnost $0,9999... = 1$.
- Chápu, že podstatou konceptu funkce je jednoznačnost přiřazení a k vysvětlení používám vhodné grafické reprezentace.
- Vysvětlím a definuji pojem klasické pravděpodobnosti na konkrétních modelech (např. házení mincí, házení hrací kostkou, náhodný výběr karet apod.).
- Umím vybudovat různé číselné obory, znám vlastnosti operací na nich a umím je vhodně využít při práci s algebraickými výrazy (např. umím dokázat existenci iracionálních čísel nebo zdůvodnit algoritmus dělení dvou racionálních čísel).

Uvědomuji si vazby a souvislosti základních matematických disciplín; získané znalosti a dovednosti aplikuji nejen uvnitř jednotlivých disciplín, ale i mezi nimi.

- Uvědomuji si, jak lze algebraické rovnice využít v analytické geometrii (soustavy rovnic pro nalezení průsečíků přímky a kuželosečky).
- Dovedu využít výpočty obsahů a objemů při řešení úloh z geometrické pravděpodobnosti (např. pravděpodobnost zásahu do části terče pomocí podílu obsahů kruhů).
- Uvědomuji si souvislost mezi klasickou a statistickou pravděpodobností a náhodnými rozděleními ve statistice.
- Uvědomuji si vazby mezi syntetickou a analytickou geometrií. Dokážu řešit vybrané geometrické úlohy více metodami.
- Využívám znalostí obsahů a objemů geometrických útvarů při odvozování dalších vztahů pro obsahy a objemy (např. obsah trojúhelníku pomocí obsahu kosodélníku).

Formuluji a řeším elementární matematické problémy s využitím

- Používám různé reprezentace funkce – tabulku funkčních hodnot, předpis, graf, slovní popis.



	symbolického jazyka matematiky, používám různé reprezentace matematických situací, zejména aritmetické, algebraické a grafické.	• Formuluji a řeším geometrické konstrukční úlohy v symbolickém jazyce. • Modeluji vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pomocí geometrické, grafické a algebraické reprezentace. • Modeluji výpočet součtu členů konkrétní nekonečné geometrické posloupnosti pomocí obsahu částí čtverce.
	Dokážu formulovat definice a věty a interpretovat klíčové matematické pojmy, vlastnosti a vztahy na různé úrovni přesnosti.	• Formuluji Pythagorovu větu ve tvaru implikace a vím, že je speciálním případem kosinové věty, umím ji interpretovat geometricky i symbolicky. Víím, že platí i věta obrácená. • Dokážu znaky dělitelnosti, umím je demonstrovat na příkladech. • Chápu koncept limity a umím jej správně interpretovat a ilustrovat bez použití přesné definice. Víím, že limitní přechod je součástí mnoha procesů (součet nekonečné řady, určování obsahů, okamžitá rychlost apod.). • Definuji míru v různých dimenzích (délka, obsah, objem) a umím ji vysvětlit. Odvodím vztahy pro výpočet míry základních objektů.
	Dokážu vyhledat a studovat historické a popularizační zdroje, a připravuji si tak svůj repertoár motivačních úloh a příkladů (viz také komp. 2.3).	• Chci porozumět některým matematickým a historickým souvislostem týkajícím se poznatků, které vyučuji. Proto si např. přečtu kvalitní knihu o historii matematiky či popularizační knihu napsanou významnými matematiky.
2. Mám pozitivní vztah k vyučovaným oborům, zajímám se o jejich vývoj a budoucnost.	Zajímám se o matematické jevy spojené s fenomény diskutovanými ve společnosti, včetně přesahů matematických pojmů a metod do dalších oborů (viz také komp. 2.3).	• Využiji dostupných zdrojů k pochopení základních principů fungování strojového učení jako reakci na zvýšený zájem o umělou inteligenci a strojové učení. • Zajímám se o fenomény rezonující ve společnosti, potenciálně vedoucí ke zvýšené motivaci pro matematiku (např. virová nákaza Covid-19 a matematické modely šíření epidemií). • Mám přehled o kvalitních YouTube kanálech (např. Numberphile, Veritasium), které popularizační, vizuální, ale korektní formou vysvětlují matematiku nebo její aplikace.
	Zajímám se o aktivity spojené s popularizací matematiky.	• Využívám nabídek dalších vzdělávacích institucí (univerzity, akademie věd, science centra aj.) pro vlastní růst.

3. Rozumím tomu, jak ve vyučovaných oborech vzniká (vědecké) poznání, využívám spolehlivé oborové zdroje informací a kriticky zdroje informací hodnotím.

Ovládám základní způsoby deduktivního dokazování stejně jako induktivního zdůvodňování matematických poznatků.

- Rozumím induktivnímu vytváření hypotézy na základě empirických dat.
- Zním princip přímého a nepřímého důkazu a důkazu sporem, s jejichž pomocí umím hypotézu dokázat, či na základě protipříkladu vyvrátit.

Rozumím tomu, že empirická a induktivní zdůvodnění nejsou pro obor obecně dostatečná; současně si uvědomuji, že bez induktivní zkušenosti lze pouze obtížně dospět k porozumění a kritickému postoji, o které se deduktivní důkaz opírá.

- Využívám empirických dat k vytvoření hypotézy o největším společném děliteli čísel ve tvaru $n^3 - n$, kterou poté dokážu deduktivně.
- Dovedu ilustrovat nedostatečnost empirických zdůvodnění např. pomocí úloh, která jsou pro nějaká „malá“ n pravdivá, ale obecně neplatí (např. závislost počtu útvarů, na které je kruh rozdělen pomocí třetiv sestavených tak, že spojují n různých bodů rozmístěných po obvodu tohoto kruhu, se jeví být 2^n , ovšem již pro $n = 5$ tato induktivně nalezená hypotéza selže a je nutný důkaz).

Uvědomuji si přítomnost a roli axiomatického systému, rozdíl mezi intuitivním uchopením pojmu a jeho definicí, a také úlohu a nezbytnost předpokladů v dokazovaném tvrzení.

- Formuluji různé definice téhož pojmu a uvědomuji si roli různých předpokladů (např. při důkazech Eulerovy věty).

Uvědomuji si historické pozadí vzniku určitých teorií, pojmů a metod, procesu postupného upřesňování pojmů a existenci různých úrovní přesnosti.

- Využívám znalosti pojetí funkce v různých historických obdobích: ve starověku byly studovány spojité křivky vzniklé spojitým pohybem bodu, ve středověku závislosti fyzikálních veličin, v novověku se matematika pokoušela o definici funkce prostřednictvím analytického předpisu (Fourier), jako jednoznačného přiřazení veličin (Dirichlet) nebo zobrazení dvou množin (Dedekind).

Využívám spolehlivé zdroje týkající se tvorby matematických poznatků a zvažuji jejich obsah ve vazbě na vyučování matematiky.

- Dobrymi zdroji jsou například *Mathematics and plausible reasoning* (Polya); *Proofs and refutations* (Lakatos); *Mathematics in Western Culture* (Kline); *Mathematical thought from ancient till modern times* (Kline).



4. Umím ve vyučovaných oborech využívat moderní technologie.	Využívám matematický software (CAS, DGS, statistický software) pro efektivní řešení a tvorbu úloh.	• Zapišu data do tabulky tabulkového softwaru a na jejich základě vytvářím a řeším úlohy pro statistické zpracování (průměr, medián, modus) a grafickou reprezentaci dat. • Tvořím a řeším úlohy na množiny bodů a jejich konstrukce v DGS. • Pomocí softwaru vytvářím a upravuji úlohy na rovnice tak, aby vyšlo požadované řešení. • Pomocí softwaru ověřím řešení různých úloh.
	Dokážu algoritmizovat vhodné matematické úlohy pro řešení s pomocí moderních technologií.	• Modeluji úlohy z finanční matematiky a algoritmizuji jejich řešení (např. tvorbu umořovacího plánu). • Navrhnu algoritmus pro výpočet členů nějaké posloupnosti (např. Fibonacci). • Dokážu objevit a ověřit algoritmus pomocí software a AI pro výpočet největšího společného dělitele dvou čísel. • Navrhnu algoritmus pro konstrukci množiny bodů dané vlastnosti.
	Vytvářím statické a interaktivní vizualizace matematických jevů s využitím moderních technologií.	• Vytvářím rovinné, popř. prostorové geometrické útvary a sleduji změny či zachování vybraných parametrů. • Vytvářím interaktivní grafy funkcí v závislosti na parametrech. • Dokážu vizualizaci přizpůsobit potřebám dalších vizualizačních nástrojů jako např. rozšířená a virtuální realita.
	Uvědomuji si rozsah přínosu moderních technologií pro svůj obor.	• Uvědomuji si, že moderní technologie umožňují algoritmizovat úlohy a automatizovat výpočty, vizualizovat různé jevy, automatické dokazování a ověřování hypotéz. Uvědomuji si jejich limity, např. výpočetní kapacitu či přesnost.
5. Orientuji se ve vztahu vyučovaných oborů a kurikula na různých stupních vzdělávání.	Vymezím obsah a popíši strukturu a cílové zaměření vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, vysvětlím její význam.	• Víím, že vzdělávací oblast Matematika a její aplikace na ZŠ se skládá z podoblastí s očekávanými výstupy, např. Geometrie v rovině a v prostoru, a že tyto podoblasti jsou doplněny učivem, např. tělesa. • Uvědomuji si možnosti matematiky pro rozvoj klíčových kompetencí.
	Jsem schopen uvést očekávané výsledky učení a jím odpovídající učivo dílčích tematických celků, rozumím jejich vazbám napříč různými stupni vzdělávání.	• Víím, že jedním z očekávaných výsledků učení v oblasti Algebra je „Řeší reálné problémy pomocí poměru, úměry a procent“, a uvědomuji si, že k tomuto výstupu se vztahuje učivo „přímá a nepřímá úměrnost“ a že na SŠ na to navazuje oblast zaměřená na téma funkce, v níž žák modeluje závislosti reálných dějů pomocí funkcí a k níž se vztahuje např. učivo exponenciální a logaritmická funkce.



	Mám přehled, jaké dokumenty upřesňují učivo a rozsah výuky matematiky pro daný stupeň vzdělávání, umím s nimi pracovat.	• Zním upřesňující dokumenty na státní úrovni, jako jsou RVP, Standardy pro základní vzdělávání, Katalog požadavků k maturitní zkoušce, dokumenty upřesňující učivo k jednotným přijímacím zkouškám aj. • Uvědomuji si, že na školní úrovni jde např. o školní vzdělávací program či jiné dokumenty, které škola přijala jako závazné.
	Jsem schopen v kurikulu matematiky identifikovat očekávané výsledky učení a související učivo s přesahem do dalších předmětů.	• Víím, že výstup na úrovni ZŠ „žák řeší aplikační úlohy na procenta“ přesahuje např. do výuky chemie (roztoky), do základů společenských věd (úrok) aj. • Víím, že výstup na úrovni SŠ související s hodnotami exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí přesahuje do výuky fyziky (mechanické kmitání a vlnění, akustika), chemie (měření pH, poločas rozpadu radioaktivních látek) aj.

Úroveň 2: Začínající učitel/ka



PŘÍKLADY OBOROVĚ SPECIFICKÉHO NAPLNĚNÍ KOMPETENCE

6. Reflektuji úroveň vlastních kompetencí ve vyučovaných oborech, jsem si vědom/a limitů těchto oborů i svých vlastních a kontinuálně se ve vyučovaných oborech vzdělávám.	Uvědomuji si, že matematika má své limity, umím uvést příklady z pohledu filozofického, teoretického i praktického.	• Umím vysvětlit, proč na čtverečkovaném papíru nelze sestrojit mřížový rovnostranný trojúhelník. • Ukážu, jak mohou ovlivnit přesnost výpočtů praktické limity měření (např. když měříme délky stran trojúhelníku a vypočítáme jeho obsah). • Dokážu vysvětlit koncept „Hilbertova hotelu“, tj. imaginárního hotelu s nekonečným počtem pokojů, kde je každý pokoj obsazen, a přesto může hotel přijmout dalšího hosta tím, že každého stávajícího hosta posune do následujícího pokoje. • Uvědomuji si, že grafické řešení rovnice pomocí grafů funkcí není obvykle přesné.
	Chápu rozdíl mezi profesemi učitel matematiky a matematik, umím se správně identifikovat (viz také komp. 6.1).	• Uvědomuji si, že zatímco matematik se věnuje výzkumu, můj hlavní cíl je efektivní výuka a přizpůsobení matematického obsahu potřebám žáků (komp. 2.2).



	Uvědomuji si úroveň svých znalostí a dovedností v jednotlivých oblastech matematiky a jejich potřebnost pro můj profesní rozvoj a podle toho plánuji a realizuji své další vzdělávání (komp. 6.1).	• Víím, u jakých typů matematických úloh jsem si jistější správností řešení. • Na základě vyhodnocení svých znalostí a dovedností se účastním odborných seminářů a studuji literaturu vhodnou pro můj profesní rozvoj. • Nemám-li dostatečné zkušenosti s výukou tématu, čerpám z odborné literatury a konzultuji svou přípravu se zkušenými kolegy (komp. 5.1).
	Zajímám se dle svých možností o vývoj oboru, dokážu popsat některé aktuálně řešené či otevřené problémy a jejich význam, a to na základě studia matematických zdrojů vhodných pro učitele matematiky.	• Sleduji některou z aktuálně rozvíjených oblastí matematiky (např. fraktální geometrie a její aplikace). • Uvědomuji si užitečnost členství v profesních organizacích (např. Společnost učitelů matematiky Jednoty českých matematiků a fyziků). • Účastním se konferencí pro učitele matematiky. • Sleduji obsah časopisů pro učitele matematiky (např. <i>Rozhledy matematicko-fyzikální, Matematika – fyzika – informatika, Učitel matematiky</i>).

Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka



PŘÍKLADY OBOROVĚ SPECIFICKÉHO NAPLNĚNÍ KOMPETENCE

7. Rozumím souvislostem vyučovaných oborů s jinými obory a průřezovým konceptům, které jsou společné více oborům.	Rozumím interpretacím matematických konceptů na příkladech z reálného života.	• Využívám svých znalostí např. geometrické posloupnosti při složeném úrokování, procent při výpočtu DPH a slevových akcí, poměru při práci s měřítkem mapy a při míchání směsí.
	Témata a problémy z jiných oborů dokážu ve vhodném zjednodušení matematizovat a řešit.	• Vztahy fyzikálních veličin matematizuji a řeším pomocí algebraických výrazů a rovnic. • Problémy z oblasti diagnostiky chorob na základě výsledků testů řeším pomocí podmíněné pravděpodobnosti. • Nejkratší vzdálenost mezi dvěma místy na zeměkouli dokážu odhadnout pomocí geometrického modelu koule.
	Matematické postupy a pojmy využívám pro kritické vyhodnocení informací v jiných oborech.	• Kriticky posuzuji grafy v mediích a v učebnicích dalších vzdělávacích oblastí z hlediska rozsahu a měřítek os. Posuzuji vhodnost zvolených charakteristik vzhledem k povaze souboru dat.



8. Rozumím terminologii, konceptům a vnitřním souvislostem vyučovaných oborů natolik, že dokážu efektivně plánovat a realizovat výuku také pro nadané a mimořádně nadané žáky s hlubokým zájmem o daný obor.		• Využívám matematické odhady k posouzení věrohodnosti číselných údajů.
	Sleduji matematické soutěže, korespondenční semináře apod., řeším úlohy z těchto soutěží, abych pochopil/a jejich podstatu.	• Zním podstatu a pravidla Matematické olympiády a Matematického klokana.
	Postup při rozvíjení talentovaných žáků koordinuji s vědeckými či akademickými pracovišti.	• Vím, že pro nadanou mládež existují různé možnosti rozvoje, které organizují např. univerzity či akademie věd.
	Témata z běžné výuky dokážu přiřadit k obecnějším konceptům, interpretovat a propojovat je mezi sebou tak, abych dokázal/a tvořit podnětné úlohy a otázky.	• Vím, že přímá/nepřímá úměrnost jsou příkladem lineární/lineární lomené funkce; tyto závislosti souvisí s pojmem poměr. Vytvářím podnětné úlohy např. na měřítko plánu či mapy, závislost obvodu čtverce na délce jeho strany, úlohy na společnou práci. • Téma kvadratická funkce propojím se soustavami lineárních rovnic a analytickou geometrií (parabola) při zjišťování, kolik hodnot funkce, resp. bodů paraboly je potřeba pro předpis kvadratické funkce. • Do výuky zařazuji postupy STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics).
	Dokážu řešit úlohy různými způsoby a tyto způsoby kriticky posoudit.	• U konstrukční úlohy o trojúhelníku se zadanými délkami dvou stran a velikostí úhlu proti jedné z nich umím začít každým z těchto prvků a uvědomuji si důsledky (při výběru strany proti zadanému úhlu úloha obvykle vede na konstrukci množiny všech bodů, z nichž je úsečku vidět pod daným úhlem, což vede ke složitější diskusi počtu řešení). • Při řešení soustavy lineárních rovnic o třech neznámých vytvořím diskusi o počtu řešení na základě vzájemné polohy tří rovin.
	Upravuji nebo vytvářím vlastní komplexnější úlohy, které dokážu gradovat podle obtížnosti.	• Při řešení rovnic vytvářím gradované úlohy například doplněním parametrů, neznámé, zvýšením stupně rovnice či řešením ve vybraných číselných oborech. • Základní aritmetické operace zprostředkují nadaným žákům prostřednictvím zajímavých posloupností, např. trojúhelníkových a čtvercových čísel a jejich zobecněními.

OBLAST 1

VYUČOVANÉ OBORY A JEJICH ZPROSTŘEDKOVÁNÍ ŽÁKŮM A ŽÁKYNÍM



Komentář k významu kompetence 1.1 pro učení žáků a žákyň

V souladu s teoretickými východisky obecného kompetenčního rámce je porozumění oboru jednou ze základních kompetencí učitele matematiky. Na základě **didaktické znalosti obsahu**, kterou popsal Shulman (1986), uvádějí Ball a kol. (2008) konkrétní požadované **znalosti specifické pro učitele matematiky**. Ty zahrnují například prezentaci matematických myšlenek, hledání reprezentativních příkladů, propojování různých reprezentací, modifikaci úloh, ověřování pravdivosti výroků a další. K tomu je zapotřebí nejen dostatečná znalost vyučovaného obsahu a metod, ale i jejich **přesahů**. Učitelé matematiky však nestačí pouze efektivně ovládat matematický aparát; vyžaduje se od něj také ovládání širokého spektra elementárních reprezentací, kterými dokáže matematické myšlenky prezentovat, a metod řešení, které dokáže využít (Stein et al., 1996). Je totiž nezbytné, aby učitel dokázal proniknout „dovnitř“ procesu matematického myšlení (Ball & Bass, 2000; Rowland & Ruthven, 2011). Specifikem vzdělávání učitelů matematiky je nutnost, aby bylo od počátku zaměřeno na konstrukci matematických pojmů, nikoliv na předávání hotových, přesně definovaných struktur: „Budoucí učitel by měl na vlastním matematickém vzdělávání pocítit, že podstatnou složkou vzdělávacího procesu je porozumění problematice, které se rozvíjí především kladením otázek, řešením problémů, zaváděním pojmů a konstrukcí struktur“ (Kuřina, 2012, s. 176.).

Z pohledu porozumění předmětu jsou v dílčích bodech kompetence 1.1 reflektovány dva základní motivy: **konceptuální pochopení obsahu** a **využívání metod kritického myšlení a argumentace**. Ma (2021) ve své empirické studii uvádí hlubokou konceptuální znalost elementární matematiky a aktivní přístup učitele ke svému vzdělávání jako zásadní

faktor pro kvalitní výuku matematiky. Jedním ze základních cílů matematiky jako vědní disciplíny je snaha o přesný popis světa, který vyžaduje použití formálního jazyka. Přitom platí, že k hlubšímu porozumění pojmu je zapotřebí vytvářet různé představy pojmu a postupně je formovat pomocí protipříkladů až k cílové definici – je totiž rozdíl mezi **představou pojmu** a **(formální) definicí pojmu** (Vinner (1991).

Neodmyslitelnou součástí matematické struktury je **formální odvozování**, které slouží jako důkaz pravdivosti tvrzení. Hofstadter (2012) popisuje důkaz jako neformální produkt lidského myšlení, k jehož zdůvodnění slouží formalizace. Cílem matematiky je pak nevyvratitelný důkaz. Hofstadter rovněž zdůrazňuje hranice mezi formalizací a intuitivním zdůvodněním už na nejzákladnější úrovni, přičemž formalizace je nezbytným prostředkem pro potvrzení pravdivosti tvrzení. Stylianides a kol. (2016) v přehledu empirických studií reflektují, že důležitým prvkem při výuce argumentace a dokazování není jen dobrá matematická znalost obsahu, ale také **postoj učitelů** k vhodnosti zavedení argumentace a důkazů do výuky a jejich **metodologická připravenost**.

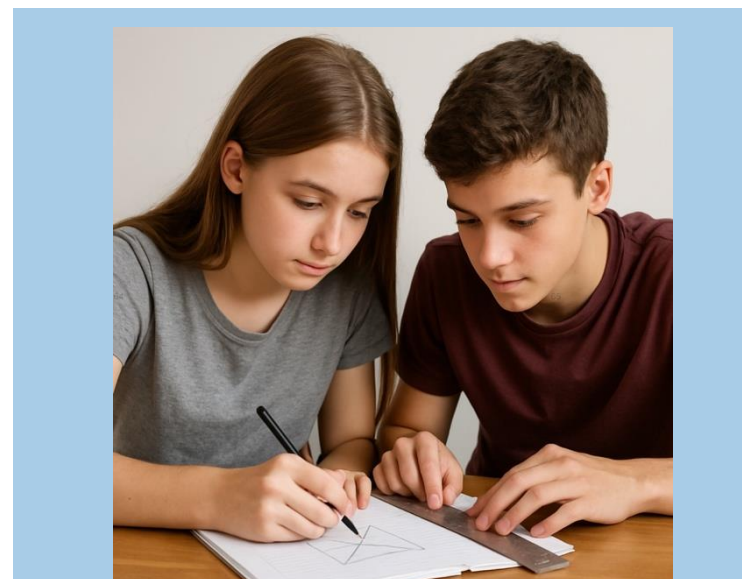
Pokud je vykrystalizovaná deduktivní forma cílem, pak jsou intuice a konstrukce přinejmenším její hnací silou (Courant et al., 1996). Polya (1954, 1962) rozlišuje **formální matematické myšlení** (axiomy, definice, důkazy) a **neformální matematické myšlení** (zobecňování, induktivní argumentace, analogie, rozpoznávání konceptů, extrakce konceptů) a zdůrazňuje demonstrativní (formálně matematické) a věrohodné

(intuitivní) zdůvodnění nezbytné pro řešení matematických problémů. Freudenthal (1973) klade důraz na osamostatnění matematických myšlenek a algoritmů a jejich uchopení pomocí aplikací v neznámém kontextu, čímž dochází k tzv. znovuoobjevení myšlenky. Tím ovšem není zpochybněna potřeba technické zručnosti učitele matematiky; naopak je tato potřeba prohloubena o její **ukotvení a využití v kontextu**.

Je proto žádoucí, aby byl učitel seznámen s různými **mezioborovými vztahy** a dokázal je aktivně vyhledávat v dostupných materiálech. Vzhledem k šíři, hloubce a dynamičnosti vědního oboru nelze předpokládat, že absolvent a učitel bude disponovat znalostí nejnovějších faktů v matematice, ovšem očekává se, že bude své **znalosti nadále prohlubovat** a bude vědět, kde hledat relevantní zdroje a jak číst a **studovat matematické texty**. Kromě aktuálních aplikací se jako vhodné ukazuje propojení matematických znalostí s jejich **historickým kontextem**. Takové propojení není jen aktivizačním nebo motivačním prvkem, ale podporuje lepší znalost, pochopení a ukotvení matematických pojmů (viz Clark et al., 2018; Panasuk & Horton, 2013).

Důležitým faktorem ovlivňujícím moderní výuku matematiky i matematiku jako disciplínu jsou **digitální technologie**. Wolfram, jeden z nejvlivnějších tvůrců matematického softwaru, popisuje ve svých pracích (Wolfram, 2002, 2022) nové možnosti **experimentálního bádání v matematice** i vědě obecně. S pomocí digitálních nástrojů je možné

provádět velké množství experimentů, které poskytují představu o vztazích a chování daného jevu, z čehož lze vyvozovat hypotézy. Drijvers et al. (2015) připomínají, že digitální technologie nenahrazují učitele, který by je měl dokázat správně využívat a propojovat s dalšími metodami. V návaznosti na Shulmana je proto důležitá obsahová připravenost učitele, tzv. **TPACK – technologická a pedagogická znalost obsahu** a také jeho postoje k těmto nástrojům (Zbiek et al., 2007).



OBLAST 1 VYUČOVANÉ OBORY A JEJICH ZPROSTŘEDKOVÁNÍ ŽÁKŮM A ŽÁKYNÍM

Kompetence 1.2: Didakticky zprostředkují obsah vyučovaných oborů žákům a žákyním v souladu s jejich vzdělávacími potřebami.

Úroveň 1:

Absolvent/ka učitelství



PŘÍKLADY OBOROVĚ SPECIFICKÉHO NAPLNĚNÍ KOMPETENCE

1. Srozumitelně a fakticky správně zprostředkují obsah vyučovaných oborů žákům a žákyním na příslušném stupni vzdělávání v souladu s jejich vzdělávacími potřebami, tj. obsah didakticky transformují.	Srozumitelně žákům zprostředkují matematické pojmy a postupy na různé úrovni přesnosti bez posunu významu z důvodu přílišného zjednodušení.	Dokážu budovat pojem vektor (resp. funkce) od propedeutiky na ZŠ (např. cesta z bodu A do bodu B, směr a délka posunutí, resp. závislosti) až po jeho vhodnou definici na SŠ v souladu s očekávanými výsledky učení.
	Vedu žáky k porozumění matematické symbolice a matematickému jazyku a dávám jim příležitost, aby se podíleli na jeho tvorbě.	Vedu žáky k porozumění jazyku algebry pomocí zobecnění jejich zkušeností z aritmetiky (např. s pravidly předností operací) a geometrie (např. s popisem výpočtů obsahů a obvodů) prostřednictvím diskuse ve třídě.
	Uvědomuji si, jaké zkušenosti si žáci přinášejí z předchozího stupně vzdělávání, a dovedu je využít pro koncipování výuky (komp. 2.1).	- Využiji zkušeností žáků z prvního stupně se zlomky jako s částmi celku a se zobrazováním zlomků v různých reprezentacích při zavedení operací se zlomky. - Využiji zkušeností žáků s mírou v geometrii (měření délky, zjišťování obsahu útvaru pokrýváním a objemu tělesa přeléváním či vyplňováním) pro odvození výpočtů obsahů útvarů a objemů těles.
	Vedu žáky ke zdůvodňování jejich závěrů a argumentaci.	Vedu žáky ke zdůvodnění platnosti věty o součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníků pomocí modelování (manipulace s pomůckami) a pomocí vět o souhlasných a střídavých úhlech.
	Vím, že některé matematické pojmy mohou v nových kontextech měnit svůj	Koncipuji výuku v souladu s tím, že pojem číslo mění svůj význam – od čísla přirozeného přes číslo desetinné, celé, racionální až k číslu reálnému, případně

	význam a že některá konceptuální a procedurální omezení mohou v průběhu vzdělávání ztratit svou didaktickou platnost.	komplexnímu. Uvědomuji si, že definiční obory funkcí se podle toho rozšiřují (např. u funkce lichá odmocnina). Na zvoleném číselném oboru závisí proveditelnost operací (odčítání: přirozená vs. celá čísla; sudá odmocnina: kladná reálná vs. všechna reálná čísla) a řešitelnost úloh (např. hledání kořenů kvadratické rovnice).
2. V rámci didaktické transformace efektivně vytvářím příležitosti pro učení a využívám vhodné vyučovací metody a prostředky pro učení, např. učební úlohy, situace, modely a modelové příklady, a informační zdroje, včetně digitálních (viz také kompetence 2.2).	Dokážu nalézt/vybrat vhodné modely/reprezentace matematických pojmů (včetně příkladů a protipříkladů) a matematických postupů a posoudit jejich přínosy a rizika pro kvalitu matematického poznatku.	• Zprostředkuji žákům výhody a omezení různých reprezentací funkce. • Při modelování části celku vedu žáky k využívání modelů kruhových, n-úhelníkových/obdélníkových, úsečkových (číselná osa) a diskrétního modelu. • Používám geometrickou reprezentaci vztahu $(a + b)^2$ k prohloubení porozumění žáků vzorci.
	Uvědomuji si časté chyby, jichž se žáci dopouštějí u klíčových pojmů a postupů, a dokážu je využít pro podporu žákovského porozumění matematice.	• Uvědomuji si nebezpečí formálního osvojení vzorců pro povrch těles či obsah rovinných útvarů, proto využívám např. u povrchů a obsahů propojení vzorců s vizuální představou (sítě těles, čtvercová síť). • Uvědomuji si rizika „zautomatizovaných“ postupů při řešení úloh (přímá a nepřímá úměrnost vs. trojčlenka) bez pochopení podstaty závislosti vztahů mezi veličinami.
	Vytvořím/sestavím úlohy, pomocí nichž žáci dospějí k poznatkům do stádia abstrakce (pokud to je vzhledem k jejich vzdělávacím potřebám účelné), a bez prozrazení řešení je dokážu nasměrovat, pokud nejsou v řešení úspěšní.	• Vytvořím sérii úloh zaměřených na vizuální modely, přes symbolické reprezentace až po úlohy vedoucí ke zformulování pravidla sčítání zlomků. • Připravím sérii úloh na práci s číselnou osou (jíž předchází např. krokování či práce s teploměrem) s cílem postupně zformulovat pravidla operací se zápornými čísly. • Při výuce řezů těles graduji úlohy typem tělesa (např. krychle vs. jehlan), umístěním bodů roviny řezu či pohledem na těleso (např. náhled vs. podhled).
	Vedu žáky k uvědomění, že existují různé strategie řešení úlohy, a k posouzení jejich vhodnosti a výhodnosti (komp. 4.3).	• Vedu žáky k tomu, aby soustavu dvou lineárních rovnic řešili algebraicky, geometricky či odhadem. • Vedu žáky k tomu, aby při řešení aplikačních úloh z kombinatoriky využívali grafické řešení, výčet možností, kombinatorická pravidla či vzorec a aby si uvědomovali užitečnost grafického řešení a výčtu k získávání vhledu do řešení.
	Znám a dokážu posoudit různá digitální prostředí a jejich vhodnost a rizika pro rozvoj porozumění matematice a vedu k tomuto uvědomění žáky (komp. 6.2).	• Vedu žáky k tomu, aby využívali CAS pro řešení algebraických, příp. geometrických úloh a software pro zpracování a analýzu dat. • Vedu žáky k vizualizaci geometrických problémů a jejich analýze (např. poloha ortocentra v závislosti na typu trojúhelníku) ve vhodném softwaru.

		Předcházím nebezpečí utajeného poznávání při použití DGS zapojováním žáků (např. místo prezentace důkazu Pythagorovy věty pomocí apletů, které žáci sledují jako „film“, formuluji úlohy vedoucí ke zkoumání vztahů mezi obsahy čtverců nad stranami trojúhelníka řešitelné v DGS).
3. Zprostředkuji žákům a žákyním souvislosti mezi oborovou teorií, reálnými jevy a životní praxí, včetně aktuálního dění (viz také kompetence 2.3).	Vedu žáky k řešení úloh založených na reálných situacích a zvědomuji jim situace z jejich světa, které matematika pomáhá řešit, čímž podporuji jejich motivaci k učení i zvědavost.	- Zařazuji praktické úlohy spojené s měřením a s určováním obsahů, objemů či velikostí úhlů, s úsporami a úroky, se zpracováním dat atp. - Vedu žáky k modelování reálných situací pomocí a diskusi o alternativách zadání (např. optimalizační úlohy) a o řešitelnosti úlohy v kontextu situace. - Předcházím vzniku potenciálně nebezpečného přesvědčení, že každá úloha je dobře zadaná a každá má (právě daný počet) řešení, zadáváním úloh z reálného života bez těchto charakteristik.
	Vedu žáky k práci s autentickými informačními zdroji podporujícími porozumění matematických poznatků.	- Využívám aktuální data Českého statistického úřadu (demografické údaje, údaje o nezaměstnanosti, vývoj HDP atp.) pro rozvoj statistické gramotnosti. - Dávám žákům příležitost k vyhledávání informací z reálných zdrojů, např. z novin, internetových stránek, letáků či map, včetně zdrojů s neúplnými informacemi, a vedu je k jejich kritickému zhodnocení.
	Motivuji žáky pro konstrukci poznatků využitím matematiky v reálném životě, historickými souvislostmi apod. podle jejich vzdělávacích potřeb.	Vytvářím příležitosti, aby žáci poznávali, že moderní technologie jsou založeny na matematických poznatcích a bez nich by neexistovaly (předpověď počasí, tomografie, satelitní navigace, umělá inteligence).
4. Vyučované obory zprostředkovávám jako otevřené a stále se vyvíjející, a jako provázané s dalšími obory; ne jako uzavřené a izolované soubory vědění.	Využívám příležitosti k propojování matematiky s dalšími vyučovacími předměty a vedu žáky k řešení mezioborových úloh.	Vedu žáky k modelování reálných problémů o pohybu těles (slovní úlohy o pohybu), optiky (lom a odraz), směsí (koncentrace roztoků, mísení kapalin o různých teplotách), společné práce (čerpadla, práce), finanční matematiky apod.
	Ve vhodných situacích budu u žáků porozumění matematickým pojmům a postupům na pozadí jejich historického vývoje, a tím poukazuji na dynamiku vývoje matematiky (komp. 2.3).	- Vedu žáky k pochopení Archimedova odvození přibližné hodnoty konstanty π (aproximací mnohoúhelníky). - Vedu žáky k tomu, aby dokázali s využitím pomůcek (provázek s uzly) vytyčit pravý úhel, čímž odkazují na předchozí generace stavitelů. - Seznamuji žáky s účelem a používáním historických početních pomůcek (abakus, logaritmické pravítko, matematické tabulky) a milníky historického vývoje (číselné soustavy, kmenové zlomky, nula a záporná čísla, římské vs. arabské číslice).

Úroveň 2:
Začínající učitel/ka



PŘÍKLADY OBOROVĚ SPECIFICKÉHO NAPLNĚNÍ KOMPETENCE

5. Pracuji s prostředím pro učení žáků, včetně digitálního, tak, aby podporovalo jejich učení ve vyučovaných oborech (viz také 3. oblast kompetencí).

Volím digitální nástroje tak, aby vedly k hlubšímu porozumění matematickým poznatkům a aby byly zohledněny vzdělávací potřeby žáků (komp. 2.2).

Uvědomuji si potenciál i limity digitálních nástrojů pro rozvoj matematických poznatků žáků a vedu k tomuto uvědomění žáky.

Vytvářím podnětné a bezpečné prostředí, v němž žáci nabývají nových poznatků prostřednictvím např. řízeného objevování, argumenty podložené diskuse, produktivní práce s chybou (komp. 2.4, 4.1).

- Vedu žáky k tomu, aby používali CAS k řešení složitějších algebraických rovnic, nerovnic a jejich soustav a zjednodušování algebraických výrazů; statistický software a tabulkové procesory k práci s reálnými daty; DGS ke konstrukci geometrických útvarů a manipulaci s nimi nebo vizualizaci a ověřování geometrických vět.

- Vedu žáky k vytváření vlastních aplikací (převodník měn, výpočet kořenů rovnice aj.).
- Při výuce „těžnice trojúhelníku“ navedu žáky ke stanovení hypotézy o průsečíku těžnic k využití DGS. Důkaz provedu jinde, neboť DGS neposkytuje argumenty k ověření.
- Využívám toho, že různá digitální prostředí (např. kapesní kalkulačka, PC program, on-line nástroj či mobilní aplikace) mohou na stejný pokyn (např. dělení číslem 0) reagovat různě, jako motivačního prvku pro matematické zkoumání.

- Algoritmus sčítání zlomků nesdělují jako hotový poznatek, ale vedu žáky ke zkoumání převodu na společný jmenovatel, které k algoritmu vede. Navrhne-li žák chybný postup, snažím se jej pomocí pomůcek a protipříkladů dovést k reflexi chyby.
- Žáky vedu k objevení věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku pomocí vhodného rozstříhání trojúhelníku, měření úhloměrem či v DGS.

6. Pracuji s předporozuměními (prekoncepty), včetně chybných porozumění (miskonceptů), která žáci a žákyně mají

Uvědomuji si, jaké matematické pojmy a postupy jsou pro žáky obtížné, jakých chyb se dopouštějí, a dokážu analyzovat příčiny a aplikovat metody, které jejich vzniku předcházejí či je didakticky využívají (komp. 2.4).

- Vyvaruji se prototypickému značení a umístění geometrických útvarů (např. trojúhelník ABC se základnou rovnoběžnou s okrajem tabule).
- Vhodnými úlohami identifikuji formální poznatky (např. žák konstatuje „nekonečně mnoho řešení“ pro soustavu dvou lineárních rovnic, ale neumí určit jedno konkrétní či rozhodnout, zda nějaká uspořádaná dvojice čísel patří mezi řešení) a předcházím jejich vzniku podporou vlastní intelektuální aktivity žáků (např. zařazováním úloh s více nebo žádným řešením).

o klíčových pojmech ve vyučovaných oborech, a s častými chybami a překážkami pro porozumění obsahu.	Vím, jak byly žákům představeny klíčové pojmy v předchozí etapě vzdělávání a jak s nimi pracovali, a dokážu na tyto skutečnosti navázat (komp. 2.1, 2.4).	Vím, že zlomky byly na 1. stupni žákům představeny jako část celku a že pro práci s nimi využívali grafické znázornění. Při výuce operací se zlomky a dalších významů zlomku na 2. stupni využívám grafické znázornění a vedu žáky k uvědomění vztahu operací a nových významů zlomku k předchozím poznatkům. Zkušeností žáků s operacemi se zlomky využívám při výuce úprav výrazů s odmocninami.
7. Vhodně využívám oborově-didaktické koncepty specifické pro vyučované obory, a to zejména při plánování, realizaci a reflexi výuky a v procesu zpětné vazby a hodnocení (viz 2. a 4. oblast kompetencí).	Pomocí odborné literatury popíši na příkladu, jak se vytváří v mysli žáka matematický poznatek, a to využiji při plánování a realizaci výuky.	- Pomocí teorie generických modelů popíši proces objevování Pythagorovy věty s motivací z praxe a historie, od prvního izolovaného modelu (žák objevuje vztah mezi obsahy čtverců nad stranami konkrétního pravoúhlého trojúhelníku), přes zobecnění vztahu do generického modelu (věta je prototypem, který lze aplikovat na různé pravoúhlé trojúhelníky). V hladině abstrakce a krystalizace vedu žáky k řešení úloh v jiných kontextech (např. v souřadném systému, při zavedení goniometrických funkcí) či k zobecnění věty pro obrazce nad stranami pravoúhlého trojúhelníku a propojení s dalšími tvrzeními (Eukleidovy věty, kosinová věta). - Popíši proces řešení slovní úlohy s rozlišením situačního a matematického modelu. Pomáhám žákům, aby si uvědomovali kroky řešení (např. pomocí zaškrťovacího seznamu).
	Uvědomuji si abstraktnost matematických poznatků a chápu, že procesu abstrakce předchází práce s konkrétními příklady poznatků.	- Žáky vedu k určování obvodu/obsahu fyzických objektů ve tvaru pravoúhelníků na základě měření jejich stran, k hledání obvodu/obsahu na čtverečkovaném papíru až po uvědomění si numerických vztahů a výpočtu pomocí obecného vztahu. - U pojmu <i>proměnná</i> vytvářím pro žáky příležitosti k propojení poznatků z aritmetiky, např. hledání hodnoty výrazu pro konkrétní hodnotu proměnné, hledání extrémů atd.
	Rozlišuji kvalitu žakovského porozumění matematickému poznatku a postupu a formuluji takové úlohy a otázky, aby žáci dosahovali hlubšího porozumění.	- Kromě úloh na určení základu a procentní části se zaměřuji na úlohy vyžadující porozumění procent v reálném životě (např. slevy, úroky, roztoky) i v netypických situacích. - Předcházím vzniku didaktických formalismů ve výuce, např. v podobě odcizeného poznávání, kdy jsou žáci seznámeni s Vietovými vzorci pro určení kořenů kvadratické rovnice a umí je aplikovat, avšak nemají vytvořenu vazbu mezi parametry ve vzorci a vlastnostmi kvadratické funkce (neumí je např. využít pro sestavení kvadratického mnohočlenu s danými kořeny). - Využívám kognitivně náročné otázky. Např. místo výpočtu obsahu obdélníku se stranami 3 cm a 4 cm se ptám: Jaké délky stran může mít obdélník o obsahu 12 cm²? Žáci navrhnou celočíselné i neceločíselné délky stran až po „velmi tenký a dlouhý obdélník“.

	Uvědomuji si, že ne každý žák dospěje k hlubokému porozumění matematickým poznatkům a postupům, ale snažím se, aby žáci dosáhli svého osobního maxima (komp. 2.2).	- Připravuji jednodušší úlohy s odstupňovanou nápovědou i složitější problémy vyžadující propojování matematických poznatků. - Připravuji série gradovaných úloh a žáci si vybírají úlohy dle svých schopností a dovedností.
	Poskytuji zpětnou vazbu na pokrok žáka/žákyně v matematice.	- Hodnotím, jak se znalosti a dovednosti žáka/žákyně v matematice vyvíjejí, nezaměřuji se pouze na deficity. - Při hodnocení řešení žáka/žákyně uvažuji celý postup řešení, nejen výsledek.

Úroveň 3: Zkušený/á učitel/ka



PŘÍKLADY OBOROVĚ SPECIFICKÉHO NAPLNĚNÍ KOMPETENCE

8. Vedu žáky a žákyně ve vyučovaných oborech ke kritickému uvažování a k tvůrčí činnosti a etickému jednání.	Dovedu koncipovat výuku tak, aby rozvíjela jednotlivé složky logicko-matematické gramotnosti.	- Rozvíjím u žáků schopnost oddělovat a popisovat kroky řešení úlohy, rozhodnout o jejich správnosti a zdůvodnit je. - Zadávám úlohy z reálného života a diskutuji s žáky vhodnost matematických modelů.
	Vedu žáky k tomu, aby diskusi nezakládali na pocitech či domněnkách, ale zejména na logických argumentech a datech (komp. 3.2, 6.2).	- Organizuji diskusi s žáky a mezi žáky ohledně vhodné dopravy na základě uhlíkové stopy a požadovaných důsledků s oporou v informacích z dobrých zdrojů. - Dovedu žáky dostávat do situací, kdy jejich úsudek a první dojem selhávají a matematická interpretace má podstatné přínosy (např. odhadnutí množství rýže v legendě o šachovnici, Wasonův výběrový test či Monty-Hallův problém).
	Vedu žáky k hledání různých postupů a přístupů k řešení úloh, včetně heuristických, a k autonomii při zdůvodňování jejich platnosti (komp. 4.3).	- Při výuce úměrností vedu žáky k hledání různých strategií a jejich zdůvodňování, k rozboru důvodů nesprávnosti postupu a pochopení navrženého řešení. - I když někdo ihned navrhne správné řešení, nechám žáky představit další strategie.

	Vedu žáky k diskusi o výsledcích matematického modelování s ohledem na morální a etické principy (komp. 6.2).	Diskutuji s žáky o vhodnosti interpretace výsledků statistického šetření s ohledem na manipulaci, např. zavádějící grafickou reprezentací.
9. Zprostředkovávám žákům a žákyním průřezová témata a koncepty, které jsou společné více oborům; případně vyučuji také mezioborově, tematicky.	Vyberu průřezové, mezioborové či integrované téma realizovatelné vzhledem k matematickému obsahu a vzdělávacím potřebám žáků a najdu či vytvořím vhodné učební materiály.	Vím, kde lze využít poměr (při míchání směsí, vyčíslování chemických rovnic, vymezování nových fyzikálních veličin, práci s mapou apod.) či kombinace procent, funkce, rovnic a posloupností (např. úroky na spořicích účtech, osobní rozpočty, finanční produkty).
	U multioborových témat dokážu zohlednit vzdělávací obsahy vstupující do tématu a zvyklosti zúčastněných oborových didaktik; dokážu účelně spolupracovat s kolegy z různých oborů (komp. 5.1).	Mám představu (nebo ji spoluprací s kolegy z jiných oborů získám) o tom, jak spolu souvisejí pojmy multioborových témat a v jakých podobách a kontextech se s nimi ve škole pracuje (např. vymezení měřítka mapy jako poměru vzdálenosti na mapě ku vzdálenosti ve skutečnosti, s 1 jako prvním číslem v poměru, grafické vyjádření měřítka mapy).
	Dokážu stanovit předpokládané znalosti, cíle a očekávané výstupy a formulovat učební úkoly mezioborové výuky z hlediska matematiky a dalších oborů (komp. 2.5, 5.1)	- Vytvořím úlohy na seznámení s měřítkem mapy a jeho číselným vyjádřením, různými typy map podle měřítka a praktickými situacemi (např. turistická mapa vs. autoatlas vs. Google Earth). - Vytvořím gradované úlohy na finanční plánování rodinného rozpočtu.
10. Mám ucelenou koncepci výuky na příslušném stupni vzdělávání ve vyučovaných oborech, a to včetně koncepce výuky žáků a žákyně se speciálními	Připravuji a realizuji výuku matematiky podle potřeb skupiny i jednotlivých žáků (komp. 2.2).	Diferencuji výuku pomocí diagnostiky a důkazů o učení u žáka/žákyně úlohami o různé formě a obsahu.
	Znám projevy běžných specifických poruch učení v matematice a nadání pro matematiku, připravuji, vyhledávám a realizuji aktivity pro vzdělávání žáků/žákyně se	- Žákovi/žákyni s diagnostikovanou dyskalkulií umožním používat kompenzační pomůcky (např. kalkulačku, stovkovou tabulku, zlomkové zdi). - Žákovi/žákyni s diagnostikovaným ADHD zadávám krátké úkoly, aby nedošlo k rozptýlení pozornosti. - Mám přehled o matematických soutěžích a dalších aktivitách pro nadané žáky, doporučím

**vzdělávacími
potřebami, včetně
nadáných
a mimořádně
nadáných.**

speciálními vzdělávacími potřebami a spolupracuji s dalšími aktéry vzdělávání (třídní učitel, asistent pedagoga, pracovníci školního a školského poradenského pracoviště, zákonní zástupci) (2.2, 5.1, 5.2).

jím vhodnou aktivitu a práci s nimi při přípravě, zařazuji pro ně rozšiřující témata (Eukleidův algoritmus, využití matic, Pickova věta apod.).

S oporou ve výsledcích aktuálních didakticko-matematických a psychologických výzkumů zprostředkuji a zdůvodním svou koncepci výuky matematiky v předmětové komisi a začínajícím kolegům (viz komp. 2.5, 5.1).

- Iniciuji a vedu diskusi o zavádění pojmů, řazení témat v ročnících a případné úpravě školního vzdělávacího programu.
- Při reflexi své hodiny zdůvodním svou přípravu, návaznost úloh, reakce na práci žáků. Identifikuji a zdůvodním své pedagogické chyby.



OBLAST 1

VYUČOVANÉ OBORY A JEJICH ZPROSTŘEDKOVÁNÍ ŽÁKŮM A ŽÁKYNÍM

Komentář k významu kompetence 1.2 pro učení žáků a žákyň

U kompetence 1.2 se opíráme o pilíře matematické zdatnosti, které popisují vzájemně propojené klíčové cíle, k nimž by měla výuka matematiky směřovat (Kilpatrick et al., 2001, s. 5). Prvním pilířem je **konceptuální porozumění**, což znamená, že žáci rozumí matematickým pojmům, objektům, operacím a vztahům mezi nimi. Toto porozumění jde nad rámec pouhého zapamatování vzorců; zahrnuje schopnost pochopit, jak spolu různé matematické koncepty souvisejí a jak je možné je aplikovat na řešení problémů. Konceptuální porozumění je základním předpokladem pro hlubší a trvalé pochopení matematiky.

Druhým pilířem je **procedurální zběhlost**, která zahrnuje schopnost provést matematický postup přesně, efektivně a v souladu s daným kontextem. Tato zběhlost však neznamena jen mechanické naučení se algoritmů bez pochopení jejich významu. Star (2005, s. 408) vymezuje procedurální zběhlost jako „znalost procedur, která je spojena s porozuměním, flexibilitou a kritickým hodnocením a která se odlišuje od znalosti pojmů (ale může s ní být spojena)“. Jde tedy o schopnost nejen správně aplikovat postupy, ale také porozumět tomu, kdy a proč je vhodné a výhodné tyto postupy použít.

Třetím pilířem je **strategická kompetence**, která znamená schopnost formulovat, znázorňovat a řešit matematické úlohy. Žáci, kteří jsou strategicky kompetentní, umí rozpoznat matematické problémy ve světě kolem sebe, formulovat je v matematickém jazyce a efektivně hledat řešení.

Čtvrtým pilířem je **adaptivní úsudek**, což zahrnuje schopnost logického myšlení, reflexe, vysvětlování a odůvodňování matematických postupů.

Adaptivní úsudek je klíčový pro pochopení hlubších matematických konceptů a pro žakovu schopnost kriticky zhodnotit své vlastní řešení nebo argumenty ostatních.

Posledním, pátým pilířem je tzv. **sklon k produktivní činnosti**. Tento pilíř popisuje běžně projevovaný postoj žáků k matematice jako smysluplné, užitečné a hodnotné činnosti. Tento postoj je úzce spjat s přesvědčením žáků o jejich schopnosti uspět a s ochotou vynaložit úsilí potřebné k dosažení úspěchu. Výzkumy ukazují, že právě tento sklon k produktivní činnosti má významný vliv na to, jaké úsilí žák matematice věnuje a jakých dosahuje výsledků (Boaler, 2016a, 2016b; Dweck, 2017).

Metaanalýza studií věnovaných kvalitě výuky matematiky Hieberta a Grouwse (2007) identifikovala dvě důležité tendence. První je, že **matematické pojmy a vztahy jsou veřejné** – jsou předměty diskuse. To znamená, že žáci dosahují konceptuálního porozumění, pokud jsou výukové aktivity zaměřeny na objasnění pojmů a vztahů mezi matematickými fakty, procedurami a myšlenkami. Žáci jsou například žádáni, aby hledali různé strategie pro řešení úloh, porovnávali je mezi sebou a zamýšleli se nad strukturou vztahů mezi matematickými myšlenkami. Užitečnost tohoto porovnávání a vyhledávání různých strategií pro porozumění matematice je podpořeno mnoha empirickými studiemi (např. Booth et al., 2017; Durkin et al., 2017; Loibl & Leuders, 2019; Guo & Pang, 2011).

Druhá tendence, kterou Hiebert a Grouws identifikovali, je, že **žáci vynakládají při snaze pochopit matematické myšlenky úsilí**. Tato tendence zdůrazňuje, že žáci musí být vystaveni kognitivním výzvám

a musí vynaložit určité úsilí, aby porozuměli matematice. Když jsou žáci postaveni před úlohy, které jsou v jejich „zóně nejbližšího vývoje“ (Vygotskij, 1970), jsou nuceni přemýšlet a objevovat řešení, což vede k hlubšímu porozumění. Učitelé zde hrají klíčovou roli, protože musí žáky vést k tomu, aby sami aktivně objevovali, vysvětlovali a sdíleli své myšlenky, aby se dostávali do kognitivních konfliktů, což je podstata **kognitivní aktivizace** v matematice (Lipowsky et al., 2009). I novější studie (např. Jonsson et al., 2014; Kapur, 2010, 2011, 2012; Schwartz & Martin, 2004) ukazují, že kognitivní úsilí je klíčovým prvkem úspěšného učení se v matematice. Metaanalýza studií Li a Ma (2010) potvrzuje, že i efektivita výuky matematiky s pomocí digitálních technologií je příznivě ovlivněna konstruktivistickým stylem, který přenáší zodpovědnost na žáky.

Od pregraduální přípravy až po samostatnou učitelskou praxi by se měla zvyšovat tzv. **didaktická citlivost učitelů**. Tato osobní schopnost jim umožňuje rozlišovat důležité aspekty výuky, přisuzovat jim význam a zaměřovat se na klíčové momenty ve vyučovací hodině (Janík et al., 2013, s. 235). Didaktická citlivost také učitelům umožňuje rozpoznat ve výuce formalismy, které mohou negativně ovlivnit porozumění žáků. Zde jde zejména o **odcizené poznávání**, při němž učitel nahrazuje poznávací aktivity žáků vlastním výkladem, a **utajené poznávání** (Janík et al., 2013), které je méně zjevné a může se objevit i v situacích, v níž se učitel snaží o podnětnou výuku, ale žákům zůstane matematické poznání v úlohách, které řeší, skryté.

Didaktická citlivost pomáhá učitelům sledovat také komunikaci mezi žáky a umožňuje jim ji regulovat tak, aby žáci přemýšleli a formulovali své myšlenky, aniž by jim učitelé příliš brzy prozradili správné řešení. Tento přístup je znám jako „**nasměrování**“ („focusing pattern“), kde se učitel snaží zaměřit pozornost žáků na klíčové aspekty problému, aniž by jim napovídal řešení a snižoval kognitivní náročnost úkolu (Wood, 1998). Naopak „**trychtýřování**“ („funneling pattern“) je situace, kdy učitel

postupně zjednodušuje otázky, až se žáci sice dopracují ke správné odpovědi, aniž by však skutečně pochopili problém. I když se tomuto komunikačnímu vzoru v běžné výuce nelze zcela vyhnout, didaktická citlivost by měla učiteli pomoci takové situace rozeznat.

V rámci prevence zmíněných projevů formalismu ve výuce je klíčová **didaktická analýza učiva**, která zahrnuje hlubší porozumění tomu, jakým způsobem žáci poznávají matematiku. Učitel by měl využívat teorie, které popisují tento proces poznávání, mezi něž patří např. teorie generických modelů (Hejný, 2014) nebo zahraniční teorie, jako je reifikace (Sfard, 1991), APOS (Dubinsky et al., 2013) či abstrakce v kontextu (Hershkowitz et al., 2001).



Použitá literatura

- Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83–104). Ablex Publishing.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Boaler, J. (2016a). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Wiley.
- Boaler, J. (2016b). *Matematické čítanie*. Tatran.
- Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C., Begolli, K. N., Chang, B., Miller-Cotto, D., Young, L. K., & Davenport, J. L. (2017). Evidence for cognitive science principles that impact learning in mathematics. In D. C. Geary, D. B. Berch, R. Ochsendorf & K. Mann Koepke (Eds.), *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 297–325). Academic Press.
- Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (Eds.). (2018). *Mathematics, education and history: Towards a harmonious partnership*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3>
- Courant, R., Robbins, H., & Stewart, I. (1996). *What is mathematics?: An elementary approach to ideas and methods* (2nd ed.). Oxford Univ. Press.
- Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In S. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135–151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8
- Dubinsky, E., Arnon, I., & Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of 0.9 and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(3), 232–258. <https://doi.org/10.1080/14926156.2013.816389>
- Durkin, K., Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: lessons learned and next steps. *ZDM*, 49(4), 585–597. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0853-9>
- Dweck, C. S. (2017). *Nastavení mysli. Nová psychologie úspěchu aneb naučte se využít svůj potenciál*. 2. aktual. vydání. Jan Melvil publishing.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2>
- Guo, J., & Pang, M. F. (2011). Learning a mathematical concept from comparing examples: The importance of variation and prior knowledge. *European Journal of Psychology of Education*, 26(4), 495–525. <https://doi.org/10.1007/s10212-011-0060-y>
- Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: Aritmetika 1. stupně*. PedF UK.
- Herschkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195–222. <https://doi.org/10.2307/749673> Hiebert a Grouws
- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester, Jr., (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–404). Information Age Publishing.
- Hofstadter, D. R. (2012). Gödel, Escher, Bach. (P. Holčák, K. Horák, O. Huřták, Z. Kárník, L. Pick, J. Podolský, J. Rákosník, & M. Žofka, Trans.). Dokořán, Argo.
- Janík, T., Slavík, J., Mužík, V., Trna, J., Janko, T., Lokajíčková, V., Lukavský, J., Minaříková, E., Sliacký, J., Šalamounová, Z., Šebestová, S., Vondrová, N., & Zlatníček, P. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky*. Masarykova univerzita.
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20–32. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.003>
- Kapur, M. (2010). Productive failure in mathematical problem solving. *Instructional Science*, 38(6), 523–550. <https://doi.org/10.1007/s11251-009-9093-x>
- Kapur, M. (2011). A further study of productive failure in mathematical problem solving: Unpacking the design components. *Instructional Science*, 39(4), 561–579. <https://doi.org/10.1007/s11251-010-9144-3>

- Kapur, M. (2012). Productive failure in learning the concept of variance. *Instructional Science*, 40(4), 651–672. <https://doi.org/10.1007/s11251-012-9209-6>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. The National Academies Press.
- Kuřina, F. (2012). Didaktické znalosti obsahu a matematické vzdělávání učitelů. *Pedagogická orientace*, 22(2), 162–180. <https://doi.org/10.5817/PedOr2012-2-162>
- Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22, 215–243. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9125-8>
- Lipowsky, F., Rakoczy, K., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., Reusser, K., & Pauli, C. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of Pythagorean Theorem. *Learning and Instruction*, 19(6), 527–537. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.11.001>
- Loibl, K., & Leuders, T. (2019). How to make failure productive: Fostering learning from errors through elaboration prompts. *Learning and Instruction*, 62, 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.03.002>
- Ma, L. (2021). *Znát a učit elementární matematiku*. Academia.
- Panasuk, R. M., & Horton, L. B. (2013). Integrating history of mathematics into the classroom: Was Aristotle wrong? *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2, 37–46. <https://doi.org/10.5430/jct.v2n2p37>
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Volume I: Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. John Wiley & Sons.
- Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical knowledge in teaching*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: Reflection on processes and object as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189x015002004>
- Schwartz, D. L., & Martin, T. (2004). Inventing to prepare for future learning: The hidden efficiency of encouraging original student production in statistics instruction. *Cognition and Instruction*, 22(2), 129–184. https://doi.org/10.1207/s1532690xc2202_1
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404–411. <http://www.jstor.org/stable/30034943>
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455–488. <https://doi.org/10.2307/1163292>
- Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In Gutiérrez, Á., Leder, G.C., Boero, P. (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 315–351). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5
- Vygotskij, L. S. (1970). *Myšlení a řeč*. SPN.
- Wolfram, S. (2002). *A new kind of science*. Wolfram Media.
- Wolfram, S. (2022). *The physicalization of metamathematics and its implications for the foundations of mathematics*. Stephen Wolfram Writings.
- Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167–178). NCTM.
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169–1207). National Council of Teachers of Mathematics.

